

Funktionen

1. Spezielle Eigenschaften von Funktionen

1.1. Verhalten im Unendlichen - Grenzwerte

Kommen die Funktionswerte $f(x)$ für betragsmäßig sehr große x -Werte einer Zahl k beliebig nahe, so ist k der Grenzwert von f für $x \rightarrow \pm\infty$.

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$ (**konvergent**)

Funktionen ohne Grenzwerte nennt man **divergent**.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

1.2. Symmetrie von Funktionsgraphen

- Gilt $f(-x) = f(x)$, so ist G_f **achsensymmetrisch** zur **y-Achse**.
- Gilt $f(-x) = -f(x)$, so ist G_f **punktsymmetrisch** zum **Koordinatenursprung**.
- Ansonsten ist keine einfach erkennbare Symmetrie vorhanden.

1.3. Transformation von Funktionstermen/

$g(x) = a \cdot f(x)$ Graph von $f(x)$ wird entlang der y-Achse um den Faktor a gestreckt, für $a < 0$ wird der G_f zusätzlich an der x-Achse gespiegelt

$g(x) = f(b \cdot x)$ Graph von $f(x)$ wird entlang der x-Achse um den Faktor $\frac{1}{b}$ gestreckt, für $b < 0$ zusätzlich an der y-Achse gespiegelt

$g(x) = f(x) + d$ Graph von $f(x)$ wird entlang der y-Achse um d verschoben

$g(x) = f(x + c)$ Graph von $f(x)$ wird entlang der x-Achse um $-c$ verschoben

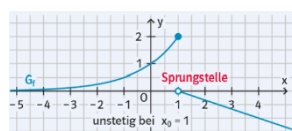
Reihenfolge bei der Beschreibung, wie der Graph von $g(x)$ aus dem Graphen von $f(x)$ hervorgeht:

zuerst Streckung/Stauchung und Spiegelung, dann Verschiebung

1.4. Stetigkeit

Ist eine Funktion f in einem Intervall I definiert und kann G_f auf diesem Intervall ohne abzusetzen gezeichnet werden, nennt man f auf I **stetig**.

Macht der Graph einer Funktion h an einer Stelle der Definitionsmenge einen „Sprung“, so nennt man die Funktion an dieser Stelle **unstetig**.



2. Gebrochen-rationale Funktionen

2.1. Definitionsmenge, Nullstellen, Linearfaktoren

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ mit } p(x), q(x) \text{ Polynome}$$

(Tipp: immer zuerst Zähler und Nenner faktorisieren $\rightarrow$ in Linearfaktoren zerlegen)

Definitionsmenge

Nullstellen des Nenners (**ungekürzt!**) sind

Definitionslücken

Nullstellen

Nullstellen des Zählers (**gekürzte Form**)

2.2. Verhalten im Unendlichen

waagrechte/schräge Asymptote

Bestimmung mit Hilfe des Grades der Polynome in Zähler (**z = Zählergrad**) und Nenner (**n = Nennergrad**)

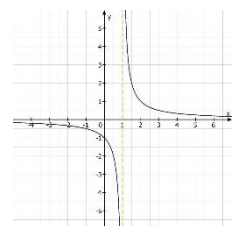
- $z < n$: waagrechte Asymptote bei $y = 0$, da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ (konvergiert)
 - $z = n$: Parallele zur x-Achse bei $y = k$, da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$ (konvergiert)
 - $z = n + 1$: schräge Asymptote bei $y = mx + t$ (divergiert)
 - $z > n + 1$: asymptotische Kurve, z.B. Parabel (divergiert)
- } Term ohne Bruch (gekürzte Form des Terms verwenden)

2.3. Polstellen; Verhalten an den Definitionslücken

Polstelle x_0 :

senkrechte Asymptoten der Form $x = x_0$

- nähert man sich von rechts und links der Polstelle, verläuft die Funktion gegen $\pm\infty$
- Ordnung: Vielfachheit der Nullstelle des Nenners bei gekürzter Form
- Gerade Ordnung: Polstelle ohne VZW, ungerade Ordnung: Polstelle mit VZW



2.4. Graph → Funktionsterm/ Funktionsterm → Graph

Mit Hilfe der Eigenschaften gebrochen-rationaler Funktionen kann man von einem Graphen auf den Funktionsterm schließen und umgekehrt.

2.5. Schnittpunkte (SP)

1. **Gleichsetzen** der Funktionsterme $f(x) = g(x)$
2. **Lösen** der Gleichung $f(x) = g(x)$
3. **Einsetzen** der x -Koordinate eines SP in einen der beiden Funktionsterme und Berechnen der y -Koordinate des SP

3. Globales und lokales Differenzieren

3.1. Mittlere Änderungsrate – Differenzenquotient

Mittlere Änderungsrate/durchschnittliche Änderung/Differenzenquotient:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

3.2. Lokale Änderungsrate – Differentialquotient

Lokale Änderungsrate/ Steigung in einem Punkt (Differentialquotient): Ableitung bilden und x -Wert einsetzen

(„Zu Fuß“ Steigung in $P(x_0/y_0)$: $m = f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$)

3.3. Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0 :

Differentialquotient existiert an dieser Stelle und ist eindeutig

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(Hat eine Funktion einen „Knick“ oder ein „Loch“, so ist sie **an dieser Stelle** nicht differenzierbar.)

3.4. Faktor- und Summenregel

Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x)$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x)$

$$f'(x) = c \cdot g'(x) \quad c \text{ ist eine Zahl!}$$

3.5. Gleichung der Tangente und Steigungswinkel

Tangente $y = mx + t$ durch Punkt $P(x_0/y_0)$ gesucht

- Steigung m durch $f'(x_0)$ (Steigung an der Stelle x_0) berechnen
- m, x_0, y_0 in Tangentengleichung einsetzen und nach t auflösen

Normale (steht senkrecht auf der Tangente)

- also gilt für die Steigung: $m_{\text{Tangente}} \cdot m_{\text{Normale}} = -1$
- m_{Normale} berechnen
- $m_{\text{Normale}}, x_0, y_0$ in Tangentengleichung einsetzen und nach t auflösen

Steigungswinkel α

= Winkel zwischen der **positiven** x -Achse und der Geraden

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \tan \alpha \quad (\text{Achtung! TR Gradmaß D})$$

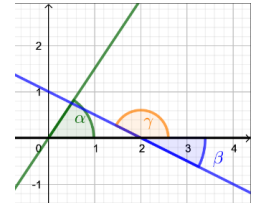
Positive Steigung:

$$\tan^{-1}(m) = \alpha$$

Negative Steigung:

$$\tan^{-1}(m) = \beta \text{ mit } \beta < 0$$

$$\gamma = 180^\circ + \beta$$



4. Anwendungen der Differentialrechnung

4.1. Monotonie und Extremstellen

Monotonieverhalten

- $f'(x) < 0$ in einem Intervall $\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend in diesem Intervall
- $f'(x) > 0$ in einem Intervall $\Rightarrow f$ ist streng monoton steigend in diesem Intervall (eine einzelne Nullstelle der Ableitung unterbricht die strenge Monotonie nicht!)

Extrempunkte bestimmen

Lage

- Ableitung bilden und gleich null setzen (Nst. mit VZW, sonst Terrassenpunkt $\Rightarrow$ Art betrachten!)
- x -Wert zur Bestimmung des zugehörigen y -Wertes in Ausgangsfunktion einsetzen

Art

- x -Wert in 2. Ableitung einsetzen $\rightarrow$ Ergebnis größer als null $\Rightarrow$ Minimum (da bei TIP linksgekrümmt) ☹
- $\rightarrow$ Ergebnis kleiner als null $\Rightarrow$ Maximum (da bei HOP rechtsgekrümmt) ☺

Alternative: Vorzeichen-tabelle, z.B. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ mit $f'(x) = x^4 - x^2$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
G_f	smf	HOP	smf	Terrassenp.	smf	TIP	smf

$$G_f \text{ smf in }]-\infty; -1] \text{ und } [1; +\infty[$$

$$G_f \text{ smf in } [-1; 1]$$

4.2. Krümmung und Wendepunkte

- $f''(x) < 0$ ☹ in einem Intervall $\Rightarrow f$ ist rechtsgekrümmt in diesem Intervall
- $f''(x) > 0$ ☺ in einem Intervall $\Rightarrow f$ ist linksgekrümmt in diesem Intervall

Wendepunkt bestimmen (an dieser Stelle ändert sich die Krümmung)

- 2. Ableitung bilden und gleich Null setzen
- 3. Ableitung ungleich Null überprüfen (kein Extremum der 2. Ableitung) oder überprüfen, ob VZW bei Nullstelle der 2. Ableitung
- x -Wert zur Bestimmung des zugehörigen y -Wertes in Ausgangsfunktion einsetzen
- Gilt zudem $f'(x_0) = 0$, so hat f bei x_0 einen **Terrassenpunkt**, da an dieser Stelle zusätzlich die Steigung null ist.
Jeder Terrassenpunkt ist zugleich Wendepunkt.

4.3. Newton-Verfahren

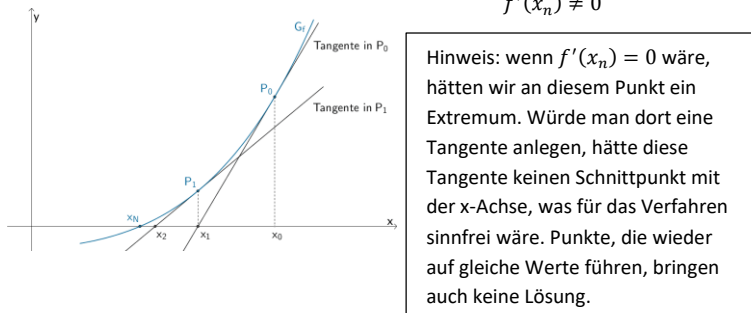
Verfahren zur Annäherung von Nullstellen
(Nullstellen sind unbekannt und sollen ungefähr ermittelt werden)

Hintergrund: x_n nahe Nullstelle wählen, am Punkt $(x_n/f(x_n))$ wird eine Tangente angelegt und deren Nullstelle berechnet.

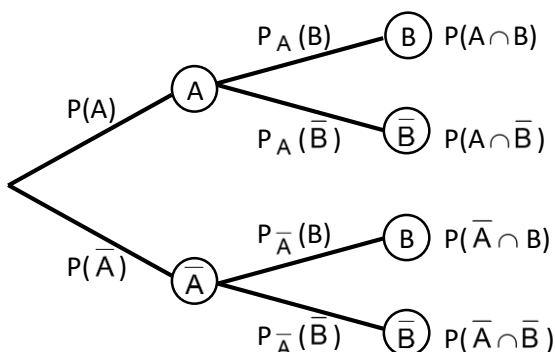
Dadurch erhält man eine Nullstelle x_{n+1} , die näher an der gesuchten Nullstelle liegt.

Verfahren zur Berechnung der nächsten, näheren

Nullstelle: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\leftarrow f'(x_n) \neq 0$

**Stochastik****5. Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit**

Definition:



Sind A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit $P(A) \neq 0$ so versteht man unter der **bedingten Wahrscheinlichkeit** $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B , wenn A bereits eingetreten ist.

Veranschaulichung:

Mit Hilfe der Pfadregeln ergibt sich:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Beispiel:

In einem Betrieb kommt es an 1% der Arbeitstage zu einem Brand (B). In 90% dieser Fälle wird ein automatischer Alarm ausgelöst (A). Liegt kein Brand vor, so gibt es mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% einen Fehlalarm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es wirklich brennt, wenn ein Alarm ausgelöst wird?

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,01 \cdot 0,9}{0,01 \cdot 0,9 + 0,01 \cdot 0,05} \approx 0,154 = 15,4\%$$

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Das bedeutet, dass das Eintreten von A keinen Einfluss auf das Eintreten von B (und andersherum) hat.

Korrelation/ Kausalität

Korrelation beschreibt einen statistischen Zusammenhang zwischen zwei Variablen, wobei eine Veränderung in der einen Variable oft mit einer Veränderung in der anderen Variable einhergeht. Kausalität hingegen bedeutet, dass eine Variable die Ursache für die Veränderung der anderen ist, also eine direkte Wirkung existiert. Korrelation bedeutet nicht automatisch Kausalität, da der Zusammenhang auch durch Zufall oder durch eine dritte, unbeobachtete Variable bedingt sein kann. Beispiel: Wenn die Eisverkaufszahlen steigen, steigen oft auch die Anzahl von Schwimmunfällen. Dies zeigt einen Zusammenhang (Korrelation), aber keine direkte Ursache-Wirkung. Der Anstieg beider Ereignisse ist meist auf eine dritte Variable zurückzuführen, nämlich heißes Sommerwetter, das sowohl den Eisverkauf als auch das Schwimmen begünstigt.