Grundwissen Mathematik 10. Klasse G9

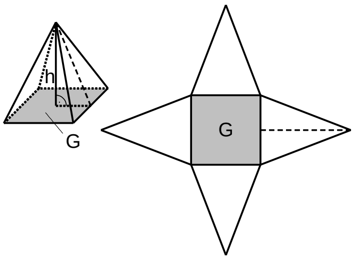
Geometrie

1. Raumgeometrie

1.1. Pyramide

Volumen:

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} G \cdot h$$



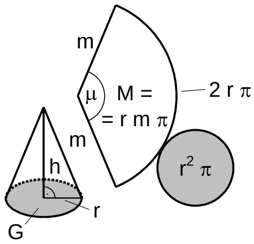
Oberfläche:

$$O_{Pyramide} = G + A_{Dreiecke}$$

1.2. Kegel

Volumen:

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$$



Oberfläche:

$$O_{Kegel} = G + M = r^2 \pi + r m \pi$$

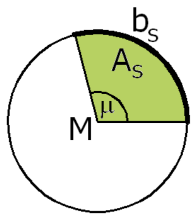
Mittelpunktswinkel des Kreissektors (abgewickelter Mantel):

$$\mu = \frac{r}{m} \cdot 360°$$

1.3. Der Kreissektor

Bogenlänge

$$b_S = \frac{\mu}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$$



Sektorfläche:

$$A_S = \frac{\mu}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$$

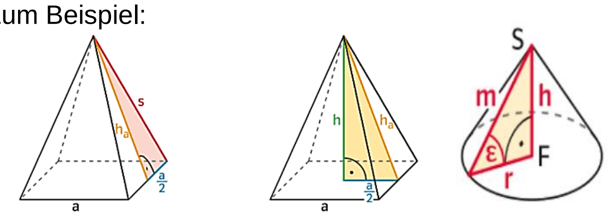
1.4. Die Kugel

Oberfläche: $O = 4\pi \cdot r^2$

Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

1.5. Berechnungen in Körpern

Um Streckenlängen und Winkelgrößen in Körper zu berechnen werden meist rechtwinklige Dreieck in die Körper „eingebaut". Mit Satz des Pythagoras und trigonometrischen Verhältnissen können dann Streckenlängen und Winkelgrößen berechnet werden. Zum Beispiel:



Im roten rechtwinkligen Dreieck gilt $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2$.

Im gelben rechtwinkligen Dreieck gilt $h_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$.

Es ist z.B. $\tan \varepsilon = \frac{h}{r}$

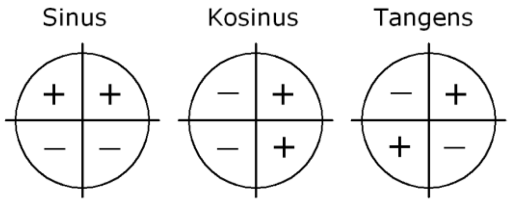
Quelle: Lambacher Schweizer 10 BY

2. Trigonometrie

2.1. Sinus-, Kosinus und Tangenswerte für Winkel φ zwischen 0° und 360°

Für stumpfe oder überstumpfe Winkel φ liefert

- der Quadrant das Vorzeichen
- die Differenz zwischen φ und 180° bzw. 360° den zugehörigen spitzen Winkel.



Beispiele:

- $\sin(120°) = \sin(180° - 120°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(225°) = \cos(225° - 180°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

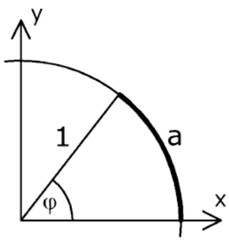
Für Winkel größer als 360° oder kleiner als 0° nutzen wir die Periodizität von Sin, Cos und Tan aus.

- $\tan(390°) = \tan(390° - 360°) = \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2.2. Das Bogenmaß

Das Bogenmaß a eines Winkels φ ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis:

$$a = \frac{\varphi}{180°} \cdot \pi$$



φ	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
a	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Funktionen

3. Trigonometrische Funktionen

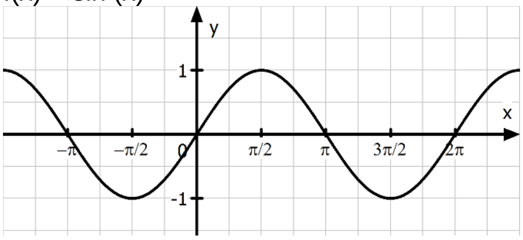
3.1. Sinus- und Kosinusfunktion

Wird jedem Winkel x im Bogenmaß der zugehörige Sinus- bzw. Kosinuswert zugeordnet, so erhält man die Sinus- bzw. Kosinusfunktion.

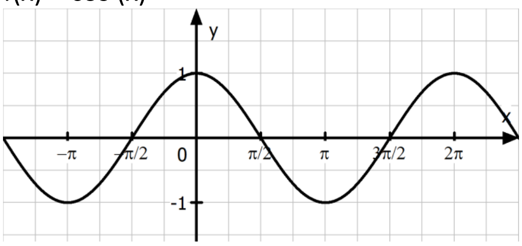
Eigenschaften:

- Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
- Wertemenge = [-1 ; 1]
- Periodisch mit der Periodenlänge 2π
- Der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung
- Der Graph der Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

f(x) = sin (x)



f(x) = cos (x)



3.2. Die allgemeine Sinusfunktion

Die allgemeine Sinuskurve zu $y = a \cdot \sin[b \cdot (x - c)] + d$ ist gegenüber der „normalen" Sinuskurve zu $y = \sin(x)$

- um c in x-Richtung verschoben
- Die Periodenlänge ist $p = \frac{2\pi}{b}$
- Die Amplitude ist $|a|$.
  Bei negativem a ist die Kurve zudem an der x-Achse gespiegelt.
- um d in y-Richtung verschoben.

Die allgemeine Sinusfunktion kann auch zur mathematischen Modellierung von periodischen Vorgängen (zB. Temperatur, Schwingungen) verwendet werden. Die relevanten Daten für die Parameter (a, b, c und d) werden dabei aus dem Sachzusammenhang oder einer Grafik ermittelt.

Beispiel:

An einem Sommertag beträgt die höchste Temperatur 26 °C; diese wird um 16:00 Uhr erreicht. Die niedrigste Temperatur von 10 °C wird um 4:00 Uhr erreicht. Um 0:00 Uhr wurden 14 °C, um 10:00 Uhr 18 °C gemessen.
Der Temperaturverlauf kann in diesem Fall durch eine Funktion f mit $f(t) = a \cdot sin\big(b(t+c)\big) + d$ modelliert werden. Dabei bezeichnet t die seit 0 Uhr vergangene Zeit in Stunden.

Die Temperatur schwankt zwischen 10°C und 26°C
➔ Amplitude $a = 8 \ = (26 - 10) : 2$

Es gilt $p = 24$ (ein Tag hat 24 Stunden) → $b = \frac{\pi}{12}$

Durch die einzelnen Messwerte lässt sich $c = -10$ und $d = 18$ ermitteln. Dies lässt sich am besten durch den gezeichneten Graphen ermitteln (Verschiebung).

In *GeoGebra* lässt sich ein periodischer Vorgang durch den Befehl „Regression" im Tabellenmodus modellieren (Regressionsmodell: sin).

4. Exponentialfunktion und Logarithmus

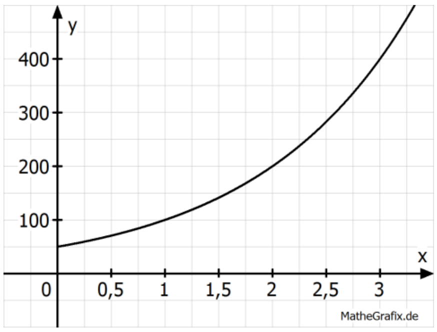
4.1. Exponentialfunktion

Die allgemeine Exponentialfunktion
$f : y = b \cdot a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$
hat folgende Eigenschaften:

- Definitionsmenge ist gleich $\mathbb{R}$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse ist P(0|b)
- Die x-Achse ist waagrechte Asymptote.
- Mit wachsendem *x* nehmen die Funktionswerte für
  a < 1 ab (exponentielle Abnahme)
  a > 1 zu (exponentielle Zunahme)
- b heißt Startwert und *a* Wachstums- bzw. Abnahmefaktor.
- Der Wachstumsfaktor berechnet sich durch $a = \frac{f(t+1)}{f(t)}$
- Obacht: Lineares Wachstum ($y = mx + t$) hat einen konstanten Wachstumsfaktor.

Beispiel:

Eine Meerschweinchenpopulation besteht am Anfang zu 50 Tieren. Unter optimalen Bedingungen kann sich die Population in einem Jahr verdoppeln.
Folglich ist b = 50, a = 2, x die Zeit in Jahren und $f(x) = 50 \cdot 2^x$ die Anzahl der Tiere nach x Jahren.
Folgender Graph zeigt die Entwicklung:



4.2. Der Logarithmus

Definition:

Der Logarithmus von b zur Basis a (a > 0, a ≠ 1, b > 0) ist diejenige Zahl, mit der a potenziert werden muss, um b zu erhalten.

Kurz: $a^{\log_a(b)} = b$

Es gilt: $\log_a(u^x) = x \cdot \log_a(u)$ für $a, b \in \backslash\mathbb{R}^+ \quad a \neq 1$
Durch die Potenzgesetze gilt:

$$2^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \log_2(8)$$
$$4^{-2} = \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad -2 = \log_4\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} = \lg\left(\sqrt[3]{10}\right)$$

$$\log_a(5^3) = 3 \cdot \log_a(5)$$
$$\lg(0{,}6^{2x-7}) = (2x-7) \cdot \lg(0{,}6)$$

4.3. Exponential- und Logarithmusgleichungen

Exponentialgleichungen löst man durch Logarithmieren oder geschicktes Umformen (auch mit Hilfe der Potenzregeln).

Beispiel:
Löse $25^{x+1} = 0{,}2$

- $25^{x+1} = 0{,}2$ | Einsetzen in $\log_{25}(...)$
  $\log_{25}\left(25^{x+1}\right) = \log_{25}(0{,}2)$
  $(x+1)\cdot 1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -1{,}5$
- Alternative:
  $(5^2)^{x+1} = 5^{-1}$
  $5^{2x+2} = 5^{-1}$
  $2x + 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -1{,}5$

5. Ganzrationale Funktionen

5.1. Potenzfunktionen

Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot x^n$, $n \in \mathbb{N}$, heißen **Potenzfunktionen** (vom Grad n).

Eigenschaften der Graphen:

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	Parabel „kommt von links oben und geht nach rechts oben“	Wendeparabel „kommt von links unten und geht nach rechts oben“
$a < 0$	Parabel „kommt von links unten und geht nach rechts unten“	Wendeparabel „kommt von links oben und geht nach rechts unten“

Das Verhalten der Graphen für $x \to \pm\infty$ lässt sich mit Hilfe des Limes-Symbols etwas mathematischer ausdrücken.

5.2. Polynomfunktionen

Definitionen:

Ein Term der Form
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$
mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, ... a_n$, ($a_n \neq 0$)
heißt **Polynom** vom Grad n.
a_n heißt der **Leitkoeffizient**.

Eine Funktion $p: x \mapsto p(x)$ heißt **ganzrationale Funktion** vom Grad n, wenn $p(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist.

Eigenschaften:
Das Verhalten der Graphen von $p(x)$ wird für betragsmäßig große x-Werte durch das der Potenzfunktion $x \mapsto a_nx^n$ beschrieben, ansonsten spielen die Nullstellen der ganzrationalen Funktion eine wichtige Rolle. Diese findet man in der Regel mit Hilfe der Polynomdivision.

5.3. Nullstellen und Faktorisieren

Eine ganzrationale Funktion vom Grad n besitzt maximal n Nullstellen.

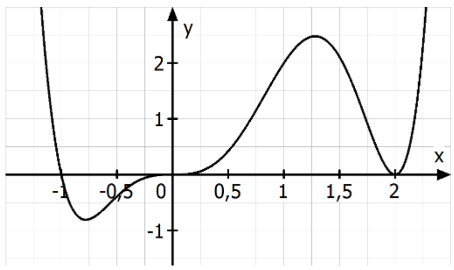
Mit Hilfe der Nullstellen lässt sich der Funktionsterm faktorisieren.

Aus der faktorisierten Form erkennt man die Vielfachheiten der Nullstellen.

Diese bestimmen das Verhalten des Graphen in der Umgebung der Nullstellen.

- ungerade Vielfachheit => Vorzeichenwechsel
- gerade Vielfachheit => kein Vorzeichenwechsel

Beispiel:
$f(x) = (x+1)\cdot x^3 \cdot (x-2)^2$ besitzt bei x = -1 eine einfache, bei x = 0 eine dreifache und bei x = 2 eine doppelte Nullstelle. Die Abbildung zeigt die Auswirkungen der Vielfachheiten auf den Graphen:



Die Nullstellen und die faktorisierte Form einer ganzrationalen Funktion können auch mithilfe von GeoGebra berechnet werden.

- ➔ Nullstelle(f) — *gibt alle Nullstellen der Funktion f aus*
- ➔ Faktorisiere(f) — *gibt die faktorisiere Form von f über den rationalen Zahlen an*
- ➔ iFaktorisiere(f) — *gibt die faktorisiere Form von f über den irrationalen Zahlen an*

5.4. Symmetrie von Funktionsgraphen

- Gilt $f(-x) = f(x)$, so ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Gilt $f(-x) = -f(x)$, so ist G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
- Ansonsten keine leicht erkennbare Symmetrie vorhanden.

Stochastik

6. Zusammengesetzte Zufallsexperimente und Simulationen

Du kennst: Zählprinzip, Baumdiagramme, Relative Häufigkeit, Laplace-Experimente

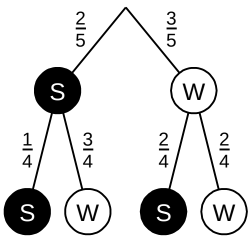
Du lernst kennen: Mehrstufige Zufallsexperimente

6.1. Pfadregeln

1. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses (1 Pfad!)** ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

2. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses (mehrere Pfade möglich!)** ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel: Aus einer Urne mit zwei schwarzen und drei weißen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne diese zurückzulegen.



Ergebnisraum:
$\Omega = \{SS, SW, WS, WW\}$

$P(SS) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ $\qquad$ $P(WW) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

P(„verschieden“) = P(SW) + P(WS)

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

6.2. Simulationen

Stochastische Experimente können in einem Tabellenkalkulationsprogramm modelliert werden. Dadurch sind schnell viele Durchführungen möglich.

Beispiel und wichtige Befehle

2 Würfel werden gleichzeitig geworfen. Ist die Differenz der Augenzahl kleiner als 3, gewinnt man.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Differenz der Augenzahlen beim Wurf zweier Würfel								
2	Nr. des Wurfes	Würfel 1	Würfel 2	Differenz	Differenz < 3?		Anzahl an Würfen	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
3	1	5	3	2	1		20	13	0,65
4	2	2	6	4	0		30	19	0,633333333
5	3	1	2	1	1		40	25	0,625
6	4	2	4	2	1		50	33	0,66
7	5	5	4	1	1		100	66	0,66
8	6	6	4	2	1				
9			4		1				

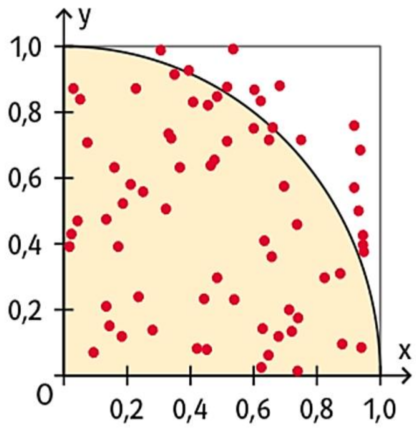
=ZUFALLSBEREICH(1;6) ABS(B3-C3) =WENN(D3<3;1;0) =ZÄHLENWENN($E$3:E22;1) =H3/G3

ZUFALLSZAHL()	Es wird eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 zufällig erzeugt.
ZUFALLSBEREICH(1;6)	Es wird eine ganze Zahl zwischen 1 und 6 zufällig erzeugt.
ABS(B3-C3)	Es wird der Betrag der Differenz der Werte der Zellen B3 und C3 ausgegeben.
WENN(D3<3;1;0)	Ist der Wert der Zelle D3 kleiner als 3, so wird der Wert 1 ausgegeben, sonst der Wert 0.
ZÄHLENWENN($E$3:E22;1)	Es wird die Anzahl an Zellen im Bereich der Zellen E3 bis E22 gezählt, deren Wert gleich 1 ist. Bei der Zelle E3 wird dabei ein absoluter Zellbezug verwendet.
ODER(A2=6;B2=6;C2=6)	Nimmt mindestens eine der drei Zellen A2, B2 oder C2 den Wert 6 an, dann wird WAHR ausgegeben, sonst FALSCH. Für Berechnungen wird WAHR als 1 interpretiert und FALSCH als 0

Quelle: Lambacher Schweizer 10 BY

6.3. Kreiszahl π und die Monte-Carlo-Methode

Zur Bestimmung der Kreiszahl π werden zufällige Punkte in einem Quadrat verteilt, dem ein Viertelkries einbeschrieben ist. Bildet man den Quotienten aus der Anzahl der Punkte innerhalb des Viertelkreises und der Gesamtzahl aller Punkte, so erhält man einen Schätzwert für den Anteil des Flächeninhalts des Viertelkreises an dem des Quadrats. Dieser Quotient stabilisiert sich um den Wert $\frac{\pi}{4}$. Vervierfacht man diesen Wert, so erhält man eine Annäherung an die Kreiszahl π.



Dieses Annäherungsverfahren lässt sich auch in einem Tabellenkalkulationsprogramm modellieren.