Grundwissen Mathematik 9. Klasse G9

Zahlen

1. Wurzeln

1.1. Rationale, irrationale und reelle Zahlen

Jede **rationale Zahl** lässt sich als Bruch schreiben.

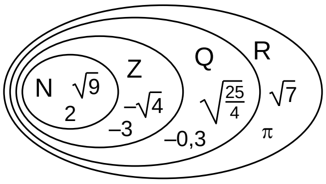
Die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl ist entweder

eine ganze Zahl	oder	ein endlicher Dezimalbruch	oder	ein unendlicher, periodischer Dezimalbruch
$-\frac{3}{1} = -3$		$\frac{3}{10} = 0{,}3$		$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$

Jede **irrationale Zahl** ist eine unendliche und nicht periodische Zahl, die sich daher nicht als Bruch schreiben lässt:

$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$; $\pi = 3{,}141592\ldots$; $0{,}101001000\ldots$

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$



1.2. Die Quadratwurzel

Die **Quadratwurzel aus a** ist diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a\ ;\quad \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Die Zahl (der Term) unter der Wurzel heißt **Radikand**, das Berechnen der Wurzel **Wurzelziehen** oder **Radizieren**.

Der Radikand darf nicht negativ sein, denn es gibt keine Zahl, deren Quadrat negativ ist. $\sqrt{-1} =$ ↯

Rechenregeln für das Rechnen mit Wurzeln:

Wurzeln von Summen:

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Aber: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

> Summanden unter **einer** Wurzel dürfen **nicht** einzeln radiziert werden.

Wurzeln von Produkten und Produkte von Wurzeln:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

> Faktoren dürfen einzeln radiziert bzw. unter einer Wurzel zusammengefasst werden.

Wurzeln von Quotienten und Quotienten von Wurzeln:

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

> Dividend u. Divisor dürfen einzeln radiziert bzw. unter eine Wurzel geschrieben werden.

Anwendungen der Rechenregeln

Teilweises Radizieren:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Unter das Wurzelzeichen ziehen:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

Produkte von Wurzeln:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

Summen von Wurzeln (mit gleichem Radikanden):

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (2 + 3) \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Nenner rational machen:

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

1.3. Definition der n-ten Wurzel

Die **n-te Wurzel aus der nicht-negativen Zahl a** ist diejenige nicht-negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt:

Man schreibt: $\sqrt[n]{a}$ Es gilt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Potenzschreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Beispiel: $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$, da $3^3 = 27$

1.4. Binomische Formeln

Plusformel:	$(a + b)^2 =$	$a^2 + 2ab + b^2$
Minusformel:	$(a - b)^2 =$	$a^2 - 2ab + b^2$
Plusminusformel:	$(a + b)(a - b) =$	$a^2 - b^2$

„Ausmultiplizieren“ →

Produktseite **Summenseite**

← *„Faktorisieren“*

1.5. Radizieren von Quadraten und von Summen

Für beliebige reelle Zahlen a gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$ (Betrag!)

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5\ ;\quad \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$$

Mit Hilfe der bin. Formeln lassen sich Summen in Produkte umwandeln. Wenn sich hierbei ein Radikand in ein Quadrat umformen lässt, kann radiziert werden:

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x + 3)^2} = |x + 3| \quad \text{(Betrag!)}$$

$$\sqrt{4a^2 - 20a + 25} = \sqrt{(2a - 5)^2} = |2a - 5| \quad \text{(Betrag!)}$$

2. Potenzen mit rationalen Exponenten

2.1. Definition und Rechenregeln

Definition: $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Summen und Differenzen von Potenzen:
Zusammenfassen, wenn Basis und Exponent gleich sind

$7a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} = (7-1) \cdot a^{\frac{1}{3}} = 6a^{\frac{1}{3}}$

Produkte und Quotienten von Potenzen (gleicher Basis):
Exponenten addieren bzw. subtrahieren

$4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{-\frac{1}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = 0{,}5$

Potenzieren von Potenzen:
Exponenten multiplizieren

$(8^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

Potenzieren von Summen und Differenzen:
Exponenten **nicht** verteilen

$(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}})^2 = 3 + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} + 3^{-1} = 3 + 2 + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$

Potenzieren von Produkten und Quotienten:
Exponenten verteilen

$(8 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{5}$

$(3:4)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} : 4^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} : (4^{\frac{1}{2}})^3 = 27^{\frac{1}{2}} : 2^3 = \frac{\sqrt{27}}{8}$

2.2. Potenzgleichungen

Die Gleichung **$x^n = a$** hat bei

	geradem Exp. n	*ungeradem Exp. n*
für $a > 0$	zwei Lös. $x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{a}$	eine Lös. $x = \sqrt[n]{a}$
für $a = 0$	eine Lös. $x = 0$	eine Lös. $x = 0$
für $a < 0$	keine Lösung	eine Lös. $x = -\sqrt[n]{a}$

(wird auch zur Berechnung der Nullstellen oder der Schnittpunkte von Potenzfunktionen benötigt
→ siehe 5. Potenzfunktionen)

Funktionen

3. Quadratische Funktion

3.1. Quadratfunktion: y = x²

Graph:
- Nach oben geöffnete Normalparabel, Scheitel S im Ursprung.

Reinquadratische Funktionen: $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Graph:
- Parabel mit dem Ursprung als Scheitel,
- für a > 0 nach oben geöffnet, für a < 0 nach unten geöffnet,
- für |a| > 1 schmaler als die Normalparabel, für |a| < 1 breiter als die Normalparabel.

3.2. Allgemeine quadratische Funktion

$y = ax^2 + bx + c$ **Normalform**

→ Die Parabel schneidet die y-Achse bei $y = c$.

$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ **Faktorisierte Form bzw. Nullstellenform**

→ x_1 und x_2 sind die Nullstellen der quadratischen Funktion

→ Berechnung der Nullstellen aus der **Normalform**, durch Gleichsetzen des Funktionsterms mit 0 und Lösung der quadratischen Gleichung.

Umwandlung **Faktorisierte Form → Normalform**:
Ausmultiplizieren und zusammenfassen

$y = a(x - x_S)^2 + y_S$ **Scheitelform**

→ Die zugehörige Parabel hat den Scheitel $S(x_S|y_S)$.
Scheitelbestimmung durch **quadr. Ergänzung.**

Umwandlung **Scheitelform → Normalform**:
Ausmultiplizieren und zusammenfassen

Beispiel:

$y = -2x^2 + 8x - 2 =$ (Normalform)

1. *Vorfaktor von x² ausklammern ($a = -2$):*
   $= -2\,[x^2 - 4x + 1] =$
2. *In der Klammer das Quadrat der Hälfte des Vorfaktors von x <u>addieren</u> und sofort wieder <u>subtrahieren</u>:*
   $= -2[x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 1] =$
3. *Binomische Formel anwenden + zusammenfassen:*
   $= -2[(x-2)^2 - 3] =$
4. *Vorfaktor a in die Klammer „hineinmultiplizieren“:*
   $= -2(x-2)^2 + 6$ (Scheitelform)

Hieraus: $S(2|6)$

4. Quadratische Gleichungen

4.1. Sonderfälle: reinquadr. und ohne Konstante

Reinquadratische Gleichung („ohne Nur-x-Term“):

$3x^2 - 15 = 0 \quad | +15 \quad |:3$
$x^2 = 5 \quad |\sqrt{\ldots}$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{5}$
$|x| = |5| \quad$ | Betrag auflösen
$x = \sqrt{5}$ oder $x = -\sqrt{5}$

Quadratische Gleichung ohne add. Konst. („ohne c“):

$2x^2 - 3x = 0 \quad | \, x$ ausklammern
$x(2x - 3) = 0 \quad$ |Nullsetzen der Faktoren
$x = 0$ oder $2x - 3 = 0 \quad$ |Auflösen nach x
$x = 0$ oder $x = 1{,}5$

Allgem. quadr. Gleichung − Lösungsformel

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ $\qquad$ $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

4.2. Diskriminante und Anzahl der Lösungen

Die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ hängt von ihrer **Diskriminante $D = b^2 - 4ac$** ab:

Es gibt…	
zwei Lösungen,	genau dann, wenn $D > 0$ ist,
genau eine Lösung,	genau dann, wenn $D = 0$ ist,
keine Lösung,	genau dann, wenn $D < 0$ ist.

5. Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten

Funktionen der Form $x \to a \cdot x^n$, $n \in \mathbb{N}$, heißen **Potenzfunktionen** (vom Grad n).

Eigenschaften der Graphen:

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	Parabel verläuft „von links oben nach rechts oben“	Wendeparabel verläuft „von links unten nach rechts oben“
$a < 0$	Parabel verläuft „von links unten nach rechts unten“	Wendeparabel verläuft „von links oben nach rechts unten“

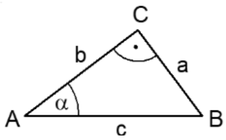
Geometrie

6. Trigonometrie

6.1. Sinus, Kosinus und Tangens

$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\to \tan\alpha = \frac{a}{b}$$



$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \to \sin\ \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \to \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

6.2. Wichtige Formeln und besondere Werte

Komplemente:

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) \text{ bzw. } \sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

Trigonometrischer Pythagoras: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Tangens-Formel: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

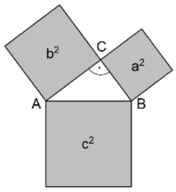
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0 $\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1 $\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.

7. Die Satzgruppe des Pythagoras

7.1. Satz des Pythagoras

Bei einem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse:

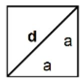
$$a^2 + b^2 = c^2$$



7.2. Wichtige Anwendungen

Diagonale des Quadrats:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \to d = a\sqrt{2}$$

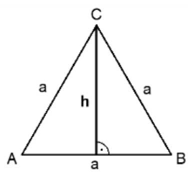


Höhe des gleichseitigen Dreiecks:

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\to h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$



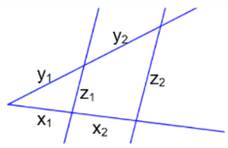
8. Strahlensatz

Werden zwei Geraden a und b mit dem Schnittpunkt S von zwei parallelen Geraden g und h geschnitten, so gilt:

V-Figur

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ 1. Strahlensatz

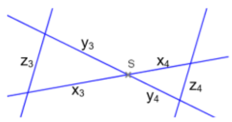
$\frac{z_2}{z_1} = \frac{y_1 + y_2}{y_1}$ 2. Strahlensatz



X-Figur

$\frac{x_3}{x_4} = \frac{y_3}{y_4}$ 1. Strahlensatz

$\frac{z_3}{z_4} = \frac{x_3}{x_4}$ 2. Strahlensatz



Umkehrung:

Gilt die Gleichheit der Verhältnisse, so sind die Geraden g und h parallel.

9. Ähnlichkeit

9.1. Ähnliche Figuren

Zwei Figuren F und G heißen ähnlich, wenn die Verhältnisse entsprechender Seiten alle gleich sind und entsprechende Winkel gleich groß sind.

Schreibweise: $F \sim G$

Flächeninhalte und Volumina ähnlicher Figuren

- Eine ähnliche Figur mit k-fachen Seitenlängen hat den k^2-fachen Flächeninhalt.
- Ein ähnlicher Körper mit k-fachen Seitenlängen hat das k^3-fache Volumen.

9.2. Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

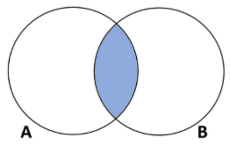
Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie ...

1. in zwei Winkeln (WW-Satz) ...
2. im Verhältnis ihrer Seiten (S:S:S-Satz) ...
3. im Verhältnis zweier Seiten und dem Zwischenwinkel (S:W:S-Satz) ...oder
4. im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (S:s:W-Satz) ...

übereinstimmen.

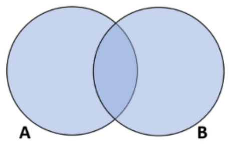
Stochastik

10. Schnitt- und Vereinigungsmenge



Die Schnittmenge zweier Mengen A und B enthält die Elemente, die sowohl in A als auch in B liegen

$\rightarrow$ Notation: $A \cap B$



Die Vereinigungsmenge zweier Mengen enthält die Elemente, die entweder in A oder in B liegen

$\rightarrow$ Notation: $A \cup B$

11. Vierfeldertafel

11.1. Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	$\boldsymbol{A}$	$\bar{\boldsymbol{A}}$	
$\boldsymbol{B}$	$\lvert A \cap B \rvert$	$\lvert \bar{A} \cap B \rvert$	$\lvert B \rvert$
$\bar{\boldsymbol{B}}$	$\lvert A \cap \bar{B} \rvert$	$\lvert \bar{A} \cap \bar{B} \rvert$	$\lvert \bar{B} \rvert$
	$\lvert A \rvert$	$\lvert \bar{A} \rvert$	Ω

Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten

	$\boldsymbol{A}$	$\bar{\boldsymbol{A}}$	
$\boldsymbol{B}$	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{\boldsymbol{B}}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Jede Zeile/Spalte der mittleren vier Felder ergibt zusammen addiert den Wert am Ende der jeweiligen Spalte/Zeile, d.h. beispielsweise

$$P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$$