Grundwissen Mathematik 8. Klasse G9

CHRISTOPH PROBST GYMNASIUM GILCHING

Funktionen

1. Begriffe

Eine **Funktion** ist eine **eindeutige Zuordnung:** Jedem Wert aus der Definitionsmenge D wird genau ein Wert aus der Wertemenge W zugeordnet.

Ist f eine Funktion und sind x und y einander zugeordnete Werte, dann schreibt man kurz:

$f: x \mapsto y$	für die **Funktionsvorschrift**
$f(x)$	für den **Funktionsterm**
$y = f(x)$	für die **Funktionsgleichung**
D_f und W_f	für **Definitions- und Wertemenge**

Die **Definitionsmenge** ist die Menge von Werten, die für x in die Funktion eingesetzt werden darf.

Die **maximale Definitionsmenge** ist die Menge von Werten, die für x in die Funktion eingesetzt werden darf, ohne eine mathematische Rechenoperation zu verletzen.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x = 0$ => $\quad D = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$

Die **Wertemenge** ist die Menge von Werten, die man erhält, wenn alle Werte aus der Definitionsmenge in die Funktion eingesetzt werden.

Funktionen können durch Wertetabellen und Funktionsgraphen veranschaulicht werden.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0 \Rightarrow y = f(0)$ bestimmt.
Der Schnittpunkt mit der x-Achse heißt **Nullstelle** von f, sie wird durch Auflösen der Gleichung $f(x) = 0$ nach x bestimmt.

Für die **Schnittpunkte zweier Funktionen** gilt: $f(x) = g(x)$. Zur Berechnung wird die Gleichung $f(x) = g(x)$ nach x aufgelöst. Dieser x-Wert wird zur Berechnung des y-Werts in eine der Funktionsgleichungen eingesetzt.

2. Direkte Proportionalität

2.1. Direkte Proportionalität

Wird dem Doppelten, Dreifach, ..., k-fachen einer Größe x das Doppelte, Dreifache, ..., k-fache einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **(direkt) proportionale** Größen.

Schreibweise: $x \sim y$

Bei dieser Zuordnung gilt $\frac{y}{x} = m$ mit festem m;

die Wertepaare sind also **quotientengleich**.

$\Rightarrow$ **Funktionsgleichung: $y = mx$**

m heißt Proportionalitätsfaktor.

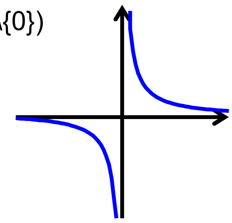
Der Graph einer solchen direkten Proportionalität ist eine Ursprungsgerade mit Steigung m.

2.2. Indirekte Proportionalität

Wird dem Doppelten, Dreifachen, ..., k-fachen einer Größe x die Hälfte, ein Drittel, ..., der k-te Teil einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **indirekt proportionale** Größen.

Bei dieser Zuordnung gilt $y \cdot x = a$ mit festem a;
die Wertepaare sind also **produktgleich**.

$\Rightarrow$ **Funktionsgleichung:** $y = \frac{a}{x}$ $\quad (D = \mathbb{Q}\setminus\{0\})$



Der Graph einer solchen indirekten Proportionalität ist eine Hyperbel.

3. Lineare Funktionen

3.1. Begriffe

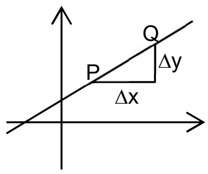
Funktionsgleichung:

$f(x) = mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**, welche die y-Achse im Punkt T(0|t) schneidet.
Man nennt daher **t** den **y-Achsenabschnitt** der Geraden.

m ist die **Steigung** der Geraden.

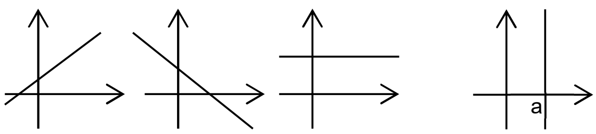
Verläuft die Gerade durch die Punkte $P(x_P|y_P)$ und $Q(x_Q|y_Q)$ (mit $x_P \neq x_Q$), so gilt für die Geradensteigung



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Man unterscheidet:

steigende,	fallende,	zur x-Achse parallele Geraden	Sonderfall: Senkrechte
$m > 0$	$m < 0$	$m=0$	Gerade $x=a$



keine Funktion

3.2. Lineare Ungleichungen

Wird eine Ungleichung beiderseits mit einem negativen Faktor multipliziert oder dividiert, muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden. Ansonsten handelt es sich nicht um eine Äquivalenzumformung.

Bsp: $-2x < -6 \quad | :(-2)$
$\quad x > 3$
Lösungsmenge: $L =]3; \infty[$ $\quad$ oder $\quad L = \{x | x > 3\}$

4. Lineare Gleichungssysteme

Zwei lineare Gleichungen, die zwei Variablen enthalten, bilden ein lineares Gleichungssystem.

Bsp.: (I) $2x + y = 5$

(II) $x - y = 1$

4.1. Graphisches Lösungsverfahren:

Zu jeder der beiden Gleichungen existieren unendlich viele Lösungen. Sie lassen sich durch Punkte des **Graphen** der entsprechenden linearen Funktion veranschaulichen.

Die **Koordinaten des Schnittpunkts $S(x_S|y_S)$** beider Graphen erfüllen als einzige beide Gleichungen. Sie bilden also zusammen die **Lösung des Gleichungssystems**, dessen Lösungsmenge $L = \{(x_S; y_S)\}$ ist.

Für obiges Beispiel ist $L = \{(2; 1)\}$.

Ein lineares Gleichungssystem kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen, je nachdem, ob die zugehörigen Geraden parallel sind, einen Schnittpunkt haben oder identisch sind.

4.2. Gleichsetzungsverfahren

Bsp.: (I) $2x + y = 5$ (II) $x - y = 1$

- Auflösen beider Gleichungen nach derselben Variablen:
  (I) $y = 5 - 2x$ (II) $y = x - 1$
- Gleichsetzen der beiden neuen rechten Seiten:
  $5 - 2x = x - 1$
- Lösen der so entstandenen Gleichung, die nun nur noch eine Variable enthält: $x = 2$
- Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln der anderen Variablen:
  z.B. (II) $y = 2 - 1 = 1$
- Angeben der Lösungsmenge: $L = \{(2; 1)\}$

4.3. Einsetzverfahren

Bsp.: (I) $2x + y = 5$ (II) $x - y = 1$

- Auflösen einer der Gleichungen nach einer Variablen:
  z.B. (I) $y = 5 - 2x$
- Einsetzen des gefundenen Terms in die andere Gleichung: in (II) $x - (5 - 2x) = 1$
- Lösen der so entstandenen Gleichung, die nun nur noch eine Variable enthält:
  $x - 5 + 2x = 1 \quad \Rightarrow x = 2$
- Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln der anderen Variablen:
  z.B. in (II) $2 - y = 1 \quad \Rightarrow y = 1$
- Angeben der Lösungsmenge: $L = \{(2; 1)\}$

4.4. Additionsverfahren

Bsp.: (I) $4x - 5y = 0$ (II) $7x - 9y = 1$

- Multiplizieren einer oder beider Gleichungen, so dass bei der Addition der so entstehenden Gleichungen eine Variable eliminiert wird:
  (I) $4x - 5y = 0 \mid \cdot 7$ (II) $7x - 9y = 1 \mid \cdot (-4)$
  $28x - 35y = 0$ $-28x + 36y = -4$
- Addition der multiplizierten Gleichungen:
  (I) + (II) $28x - 35y + (-28x + 36y) = 0 + (-4)$
- Lösung der entstandenen Gleichung mit nur einer Variablen: $y = -4$
- Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und ermitteln der anderen Variablen:
  z.B. in (I) $4x - 5 \cdot (-4) = 0 \quad \Rightarrow x = -5$
- Angeben der Lösungsmenge: $L = \{(-5; -4)\}$

4.5. Probe

Ermittelte x- und y-Werte müssen in **beide** Gleichungen eingesetzt werden.

Bsp: (I) $4x - 5y = 0$

(II) $7x - 9y = 1$

mit $L = \{(-5; -4)\}$

(I) $4 \cdot (-5) - 5 \cdot (-4) = -20 + 20 = 0$
(II) $7 \cdot (-5) - 9 \cdot (-4) = -35 + 36 = 1$

5. Gebrochen rationale Funktionen

5.1. Gebrochen-rationale Funktionen

Die Funktionsterme gebrochen-rationaler Funktionen enthalten im Nenner die unabhängige Variable x.

Für diejenigen x-Werte, für die der Nenner Null wird, ist die Funktion **nicht definiert**.

Einfache Beispiele von gebrochen-rationalen Funktionen sind Funktionen der Form $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ (mit $D = \mathbb{Q}\setminus\{b\}$).

Ihre Graphen sind **Hyperbeln**.

Bei Funktionen dieser Form gibt es eine senkrechte Asymptote $x = b$ und eine waagrechte Asymptote $y = c$.

Die indirekte Proportionalität ist ein Sonderfall der gebrochen-rationalen Funktionen.

5.2. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Der Ausdruck $\mathbf{a^n}$ heißt **Potenz**.
Hierbei ist a die **Basis** und n der **Exponent**.

Es gilt $a^0 = 1$ für $a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$

Gesetze:

Multiplizieren:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\qquad$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Dividieren:

$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad a \neq 0$ $\qquad$ $a^n : b^n = (a : b)^n, \quad b \neq 0$

Potenzieren:

$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

Rechenreihenfolge

$\boxed{\text{Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich}}$

Geometrie

6. Berechnungen am Kreis

6.1. Der Kreisumfang

Kreiszahl: $\pi \approx 3{,}14$

Umfang u und Radius r eines Kreises sind direkt proportional zueinander:

$\boxed{u = 2 \cdot r \cdot \pi}$ bzw. $u = d \cdot \pi$

(d: Durchmesser, denn $d = 2 \cdot r$)

6.2. Die Kreisfläche

$\boxed{A = r^2 \cdot \pi}$

Verdreifacht man zum Beispiel den Radius eines Kreises, so verneunfacht sich der Flächeninhalt.

Stochastik

7. Zufall und Wahrscheinlichkeit

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Experiment, bei dem verschiedene Ergebnisse möglich sind.

Die Menge Ω aller Ergebnisse nennt man **Ergebnisraum**.

Ein **Ereignis** ist eine Zusammenfassung von Ergebnissen.

Sind alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleich wahrscheinlich, spricht man von einem **Laplace-Experiment**.

Beispiele: Münzwurf mit einer Laplace-Münze, Würfeln mit einem Laplace-Würfel.

Bei einem Laplace-Experiment kann man die **Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A** berechnen:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

Zählprinzip:

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Anzahl aller möglichen Ergebnisse, indem man die Anzahl der Möglichkeiten der einzelnen Stufen miteinander multipliziert.

Beispiel:
Zweifaches Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit anfangs 3 unterscheidbaren Kugeln (rot, blau, schwarz), mit Beachtung der Reihenfolge:

$|\Omega| = 3 \cdot 3$

Baumdiagramm: