

Zahlen

1. Menge N der natürlichen Zahlen

1.1. Begriffe

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

Bsp.: 5 ist eine natürliche Zahl:

$5 \in \mathbb{N}$ „5 ist Element von \mathbb{N} “

0 ist keine natürliche Zahl:

$0 \notin \mathbb{N}$ „0 ist nicht Element von \mathbb{N} “

1.2. Primzahlen

Eine Zahl heißt Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler (1 und sich selbst) hat. Die ersten Primzahlen:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...

1.3. Zehnerpotenzen

$10^0 = 1$ eins	$10^4 = 10.000$ zehntausend
$10^1 = 10$ zehn	$10^5 = 100.000$ hunderttausend
$10^2 = 100$ hundert	$10^6 = 1.000.000$ eine Million
$10^3 = 1.000$ tausend	$10^9 = 1.000.000.000$ eine Milliarde

1.4. Stufenzahlen im Zehnersystem

1; 10; 100; 1.000; 10.000; 100.000; 1.000.000; ...

1.5. Zehnersystem

Der Wert jeder Ziffer hängt davon ab, an welcher Stelle sie in der Zahl steht (**Stellenwertsystem**).

Stellenwert	Mrd	HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E
Ziffer	3	5	0	2	4	7	8	2	1	9

1.6. Runden von Zahlen

Abgerundet wird bei den Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4, aufgerundet wird bei den Ziffern 5, 6, 7, 8 und 9.

Bsp.: 26.453 (Z) ≈ 26.450 ; 26.453 (H) ≈ 26.500 ; 26.453 (T) ≈ 26.000 ; 26.453 (ZT) ≈ 30.000

1.7. Beweistechnik: Widerlegen durch ein Gegenbeispiel

Um zu beweisen, dass eine allgemeine Aussage falsch ist, genügt es, ein einziges Gegenbeispiel zu finden.

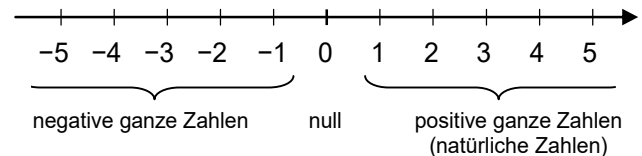
Bsp: Die Aussage „Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 4 teilbar ist“ ist falsch, weil sie für 13 nicht zutrifft.

2. Menge Z der ganzen Zahlen

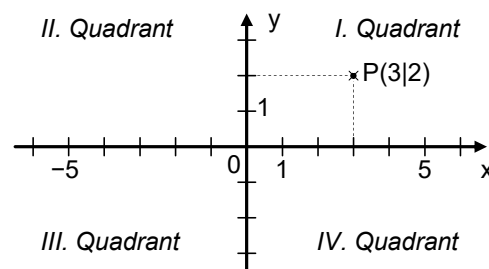
2.1. Begriffe

$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Zahlengerade



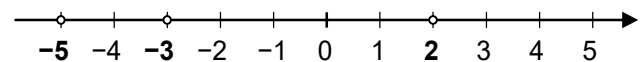
Koordinatensystem



2.2. Größenvergleich ganzer Zahlen

Von zwei ganzen Zahlen ist diejenige größer (kleiner), die auf der Zahlengerade weiter rechts (links) liegt.

Bsp.: $-5 < -3$ und $-3 < 2$ bzw. $2 > -3$ und $-3 > -5$



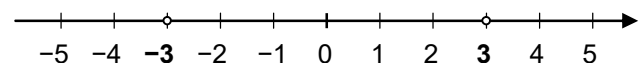
Anordnung in einer **steigenden Ungleichungskette**:

$-5 < -3 < 2$ „-5 kleiner -3 kleiner 2“

2.3. Betrag und Gegenzahl

Der **Betrag** einer Zahl ist ihr Abstand von der Null auf der Zahlengerade.

Bsp.: Der Betrag von -3 ist 3.



Zwei Zahlen, die den gleichen Betrag, aber unterschiedliche Vorzeichen haben, heißen **Gegenzahlen**.

Bsp.: -3 ist die Gegenzahl von 3 (und umgekehrt).

3. Rechenarten und Termbegriffe

3.1. Addition

$$\text{Bsp.: } \underbrace{32 + 65}_{\substack{\text{1. Summand plus 2. Summand} \\ \text{SUMME}}} = 97$$

Wert der Summe

3.2. Subtraktion

$$\text{Bsp.: } \underbrace{97 - 65}_{\substack{\text{Minuend minus Subtrahend} \\ \text{DIFFERENZ}}} = 32$$

Wert der Differenz

3.3. Multiplikation

$$\text{Bsp.: } \underbrace{13 \cdot 8}_{\substack{\text{1. Faktor mal 2. Faktor} \\ \text{PRODUKT}}} = 104$$

Wert des Produkts

3.4. Division

$$\text{Bsp.: } \underbrace{48 : 4}_{\substack{\text{Dividend durch Divisor} \\ \text{QUOTIENT}}} = 12$$

Wert des Quotienten

3.5. Potenzieren

$$\text{Bsp.: } \underbrace{3^4}_{\substack{\text{Basis hoch Exponent} \\ \text{POTENZ}}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\substack{\text{4 Faktoren „3“}}} = 81$$

Wert der Potenz

4. Rechnen mit ganzen Zahlen

4.1. Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

Addieren:

Gleiche Vorzeichen:

1. Addiere die Beträge.
2. Gib der Summe das gemeinsame Vorzeichen.

Verschiedene Vorzeichen:

1. Subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren Betrag.
2. Gib der Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.

Subtrahieren einer Zahl bedeutet Addieren ihrer Gegenzahl

Klammern auflösen:

$+ (+a) = + a$
$+ (-a) = - a$
$- (+a) = - a$
$- (-a) = + a$

4.2. Multiplikation und Division ganzer Zahlen

$$\text{Bsp.: } \begin{array}{ll} (+4) \cdot (+5) = +20 & (+12) : (+2) = +6 \\ (+4) \cdot (-5) = -20 & (+12) : (-2) = -6 \\ (-4) \cdot (+5) = -20 & (-12) : (+2) = -6 \\ (-4) \cdot (-5) = +20 & (-12) : (-2) = +6 \end{array}$$

1. Multipliziere/Dividiere die Beträge.
 2. Bei gleichem Vorzeichen:
gib dem Produkt/Quotient das Vorzeichen „+“.
- Bei unterschiedlichem Vorzeichen:
gib dem Produkt/Quotient das Vorzeichen „-“.

+	+	⇒	+
+	-	⇒	-
-	+	⇒	-
-	-	⇒	+

4.3. Potenzen mit negativer Basis bzw. Produkte mit vielen Faktoren

Vorzeichen:

- Gerader Exponent bzw. gerade Anzahl „-“:
→ Ergebnis positiv „+“
- Ungerader Exponent bzw. ungerade Anzahl „-“:
→ Ergebnis negativ „-“

Betrag:

- Potenzwert bei positiver Basis bzw. Produkt der Beträge

4.4. Rechengesetze

Rechenreihenfolge

„Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich“



Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

- der Addition: $a + b = b + a$
- der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

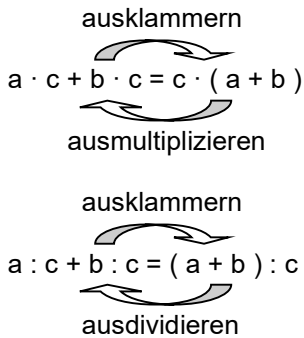
- der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributivgesetze (Verteilungsgesetz):

- $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c = (b \pm c) \cdot a$
- $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$

4.5. Rechenvorteile mit den Distributivgesetzen

- Ausklammern eines gemeinsamen Faktors:
 $7 \cdot 13 + 7 \cdot 17 = 7 \cdot (13 + 17) = 7 \cdot 30 = 210$
- Ausklammern des gemeinsamen des Divisors:
 $56 : 4 - 16 : 4 = (56 - 16) : 4 = 40 : 4 = 10$
- „Ausmultiplizieren“:
 $3 \cdot 37 = 3 \cdot (30 + 7) = 3 \cdot 30 + 3 \cdot 7 = 90 + 21 = 111$
- „Ausdividieren“:
 $87 : 3 = (90 - 3) : 3 = 90 : 3 - 3 : 3 = 30 - 1 = 29$



4.6. Gleichungen

Einfache Gleichungen mit Hilfe der Umkehraufgabe oder durch Probieren lösen.

Bsp: $6 : x = 2 \Rightarrow x = 6 : 2; x = 3$
 $3 - x = 5 \Rightarrow x = -2$

5. Größen und ihre Einheiten

5.1. Geld

$1 \text{ €} = 100 \text{ ct}$ $1 \text{ ct} = 0,01 \text{ €}$

5.2. Zeit

$1 \text{ a} = 12 \text{ Monate}$ $1 \text{ a} = 365 \text{ d}$
 Schaltjahr: 366 d
 $1 \text{ d} = 24 \text{ h}$
 $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3.600 \text{ s}$
 $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

5.3. Länge

$1 \text{ km} = 1.000 \text{ m}$
 $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$
 $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$
 $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$

km	m			dm	cm	mm
1	100	10	1	1	1	1

$1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$
 $1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$
 $1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm} = 0,01 \text{ m}$
 $1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm} = 0,01 \text{ dm} = 0,001 \text{ m}$

5.4. Masse

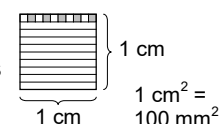
$1 \text{ t} = 1.000 \text{ kg}$
 $1 \text{ kg} = 1.000 \text{ g}$
 $1 \text{ g} = 1.000 \text{ mg}$

t	kg			g			mg		
1	100	10	1	100	10	1	100	10	1

$1 \text{ kg} = 0,001 \text{ t}$
 $1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg} = 0,000.001 \text{ t}$
 $1 \text{ mg} = 0,001 \text{ g} = 0,000.001 \text{ kg}$

5.5. Flächeninhalt

Ein Quadratmeter (1 cm^2) ist der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 1 \text{ cm}$.



$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha} = 10.000 \text{ a} = 1.000.000 \text{ m}^2$
 $1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10.000 \text{ m}^2 = 1.000.000 \text{ dm}^2$
 $1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2 = 10.000 \text{ dm}^2 = 1.000.000 \text{ cm}^2$
 $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10.000 \text{ cm}^2 = 1.000.000 \text{ mm}^2$
 $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10.000 \text{ mm}^2$
 $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$

km ²	Ha	a	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
1	10	1	10	1	10	1

$1 \text{ ha} = 0,01 \text{ km}^2$
 $1 \text{ a} = 0,01 \text{ ha} = 0,000.1 \text{ km}^2$
 $1 \text{ m}^2 = 0,01 \text{ a} = 0,000.1 \text{ ha} = 0,000.001 \text{ km}^2$
 $1 \text{ dm}^2 = 0,01 \text{ m}^2 = 0,000.1 \text{ a} = 0,000.001 \text{ ha}$
 $1 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ dm}^2 = 0,000.1 \text{ m}^2 = 0,000.001 \text{ a}$
 $1 \text{ mm}^2 = 0,01 \text{ cm}^2 = 0,000.1 \text{ dm}^2 = 0,000.001 \text{ m}^2$

5.6. Rechnen mit Größen

Beispiele:

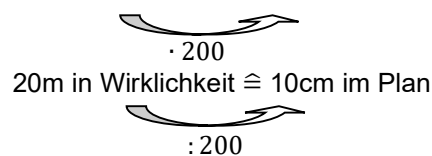
$12 \text{ kg} : 3 \text{ kg} = 4$ Größe : Größe \Rightarrow Zahl
 $12 \text{ kg} : 3 = 4 \text{ kg}$ Größe : Zahl \Rightarrow Größe
 $3 \text{ kg} \cdot 4 = 12 \text{ kg}$ Größe \cdot Zahl \Rightarrow Größe

Beachte: Die Größen müssen jeweils in der gleichen Einheit vorliegen.

5.7. Maßstab

Die Angabe Maßstab 1:200 in einem Plan bedeutet: 1 cm auf dem Plan entsprechen 200 cm (=2m) in Wirklichkeit.

Umrechnung Bsp:
 3mm im Plan $\hat{=}$ 60 cm in Wirklichkeit



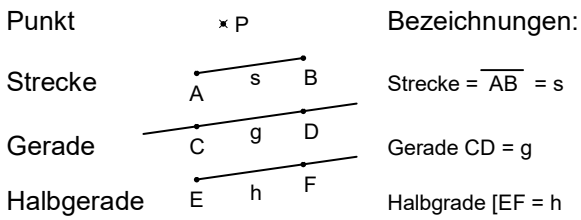
5.8. Dreisatz



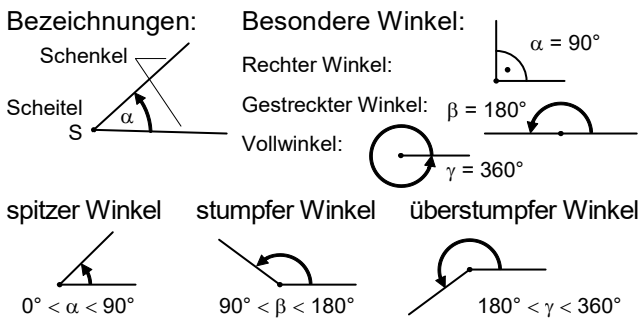
Geometrie

6. Grundlagen

6.1. Geometrische Grundelemente

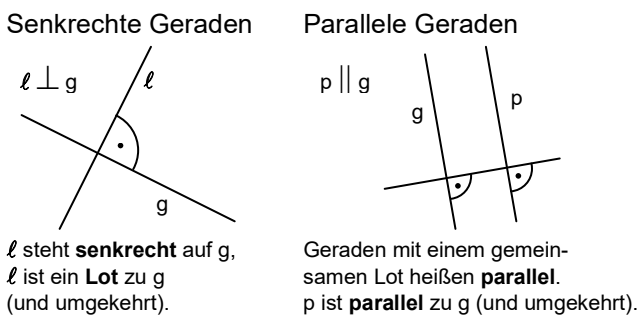


6.2. Winkel

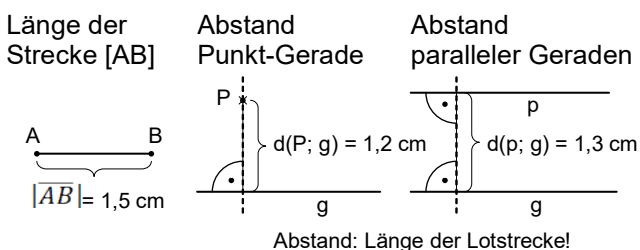


Messen und Zeichnen!

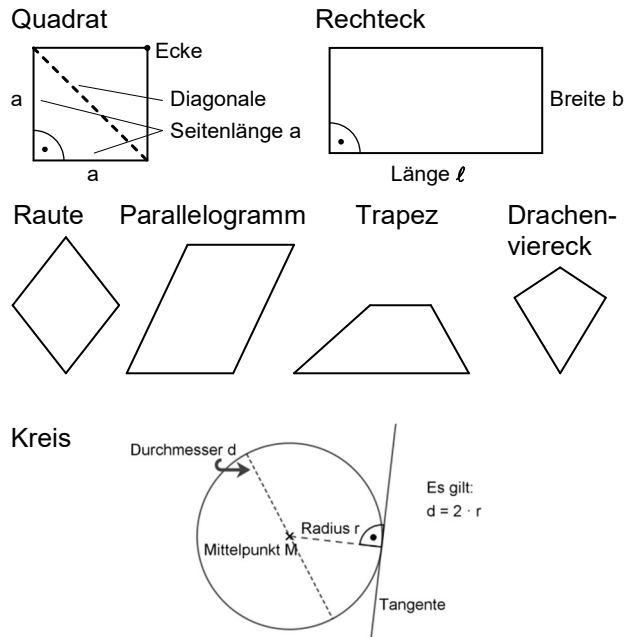
6.3. Besondere Lage von Geraden



6.4. Streckenlänge und Abstände



6.5. Geometrische Grundfiguren



6.6. Umfanglänge von Rechteck und Quadrat

Vorstellung: „Einmal außen rum!“

Rechteck: $U_R = 2 \cdot \ell + 2 \cdot b = 2 \cdot (\ell + b)$

Quadrat: $U_Q = 4 \cdot a$

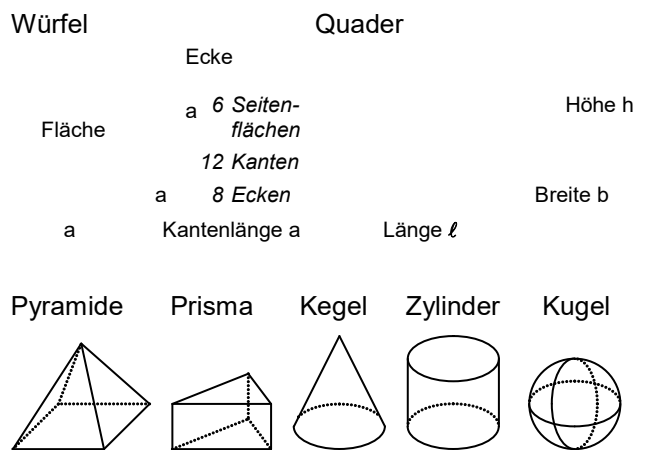
6.7. Flächeninhalt von Rechteck und Quadrat

Vorstellung: „Was man ausmalen muss!“

Rechteck: $A_R = \ell \cdot b$ („Länge mal Breite“)

Quadrat: $A_Q = a \cdot a = a^2$

6.8. Geometrische Grundkörper



6.9. Oberfläche von Quader und Würfel

Vorstellung: „Was man anmalen muss!“

Quader: $O_Q = 2 \cdot \ell \cdot b + 2 \cdot \ell \cdot h + 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot (\ell \cdot b + \ell \cdot h + b \cdot h)$

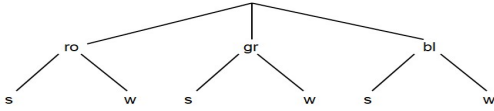
Würfel: $O_W = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$

Stochastik

7. Kombinatorik

„Baumdiagramm“

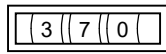
Bsp.: 3 T-Shirts rot, grün und blau werden mit 2 Hosen schwarz und weiß kombiniert, es gibt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.



Wenn das blaue Shirt nicht mit der schwarzen Hose und das rote nicht mit der weißen Hose kombiniert werden sollen, ergeben sich durch Abzählen der Äste noch 4 Möglichkeiten.

„Zahlenschloss“

Bsp.: 3 Rädchen
mit jeweils 8 Einstellungen:
Es gibt $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ Kombinationen.



„Bücherregal“

Bsp.: Verschiedene Reihenfolgen
von 4 Büchern in einem Regal:
Es gibt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ Möglichkeiten.

