Grundwissen Mathematik 5. Klasse

CHRISTOPH PROBST GYMNASIUM GILCHING

Zahlen

1. Menge ℕ der natürlichen Zahlen

1.1. Begriffe

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$ $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; ...\}$

Bsp.: 5 ist eine natürliche Zahl:
$5 \in \mathbb{N}$ „5 ist Element von ℕ“
0 ist keine natürliche Zahl:
$0 \notin \mathbb{N}$ „0 ist nicht Element von ℕ“

1.2. Primzahlen

Eine Zahl heißt Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler (1 und sich selbst) hat. Die ersten Primzahlen:
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; …

1.3. Zehnerpotenzen

10^0 =	1	eins	10^4 =	10.000	zehntausend
10^1 =	10	zehn	10^5 =	100.000	hunderttausend
10^2 =	100	hundert	10^6 =	1.000.000	eine Million
10^3 =	1.000	tausend	10^9 =	1.000.000.000	eine Milliarde

1.4. Stufenzahlen im Zehnersystem

1; 10; 100; 1.000; 10.000; 100.000; 1.000.000; …

1.5. Zehnersystem

Der Wert jeder Ziffer hängt davon ab, an welcher Stelle sie in der Zahl steht (**Stellenwertsystem**).

Stellenwert	Mrd	HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E
Ziffer	3	5	0	2	4	7	8	2	1	9

1.6. Runden von Zahlen

Abgerundet wird bei den Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4, aufgerundet wird bei den Ziffern 5, 6, 7, 8 und 9.

Bsp.: 26.453 (Z) ≈ 26.450 ; 26.453 (H) ≈ 26.500 ; 26.453 (T) ≈ 26.000 ; 26.453 (ZT) ≈ 30.000

1.7. Beweistechnik: Widerlegen durch ein Gegenbeispiel

Um zu beweisen, dass eine allgemeine Aussage falsch ist, genügt es, ein einziges Gegenbeispiel zu finden.

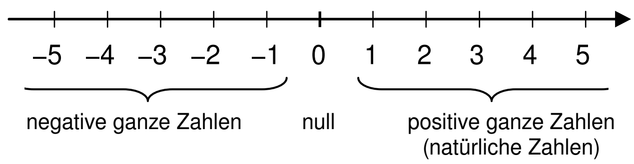
Bsp: Die Aussage „Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 4 teilbar ist“ ist falsch, weil sie für 13 nicht zutrifft.

2. Menge ℤ der ganzen Zahlen

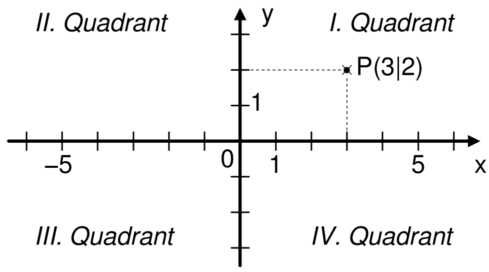
2.1. Begriffe

$\mathbb{Z} = \{…; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; …\}$

Zahlengerade



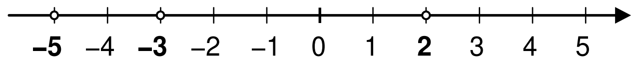
Koordinatensystem



2.2. Größenvergleich ganzer Zahlen

Von zwei ganzen Zahlen ist diejenige größer (kleiner), die auf der Zahlengerade weiter rechts (links) liegt.

Bsp.: $-5 < -3$ und $-3 < 2$ bzw. $2 > -3$ und $-3 > -5$

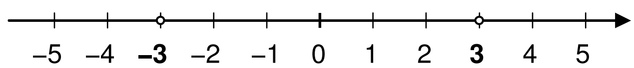


Anordung in einer **steigenden Ungleichungskette**:
$-5 < -3 < 2$ „–5 kleiner –3 kleiner 2“

2.3. Betrag und Gegenzahl

Der **Betrag** einer Zahl ist ihr Abstand von derNull auf der Zahlengerade.

Bsp.: Der Betrag von –3 ist 3.



Zwei Zahlen, die den gleichen Betrag, aber unterschiedliche Vorzeichen haben, heißen **Gegenzahlen**.

Bsp.: –3 ist die Gegenzahl von 3 (und umgekehrt).

3. Rechenarten und Termbegriffe

3.1. Addition

Bsp.: $\underbrace{\underset{\textbf{1. Summand}}{32} \quad \underset{\textbf{plus}}{+} \quad \underset{\textbf{2. Summand}}{65}}_{\textbf{SUMME}} \quad = \quad \underset{\textbf{Wert der Summe}}{97}$

3.2. Subtraktion

Bsp.: $\underbrace{\underset{\textbf{Minuend}}{97} \quad \underset{\textbf{minus}}{-} \quad \underset{\textbf{Subtrahend}}{65}}_{\textbf{DIFFERENZ}} \quad = \quad \underset{\textbf{Wert der Differenz}}{32}$

3.3. Multiplikation

Bsp.: $\underbrace{\underset{\textbf{1. Faktor}}{13} \quad \underset{\textbf{mal}}{\cdot} \quad \underset{\textbf{2. Faktor}}{8}}_{\textbf{PRODUKT}} \quad = \quad \underset{\textbf{Wert des Produkts}}{104}$

3.4. Division

Bsp.: $\underbrace{\underset{\textbf{Dividend}}{48} \quad \underset{\textbf{durch}}{:} \quad \underset{\textbf{Divisor}}{4}}_{\textbf{QUOTIENT}} \quad = \quad \underset{\textbf{Wert des Quotienten}}{12}$

3.5. Potenzieren

Bsp.: $\underbrace{\underset{\textbf{Basis hoch Exponent}}{3^4}}_{\textbf{POTENZ}} \quad = \quad \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\textbf{4 Faktoren „3"}} \quad = \quad \underset{\textbf{Wert der Potenz}}{81}$

4. Rechnen mit ganzen Zahlen

4.1. Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

Addieren:

Gleiche Vorzeichen:

1. Addiere die Beträge.
2. Gib der Summe das gemeinsame Vorzeichen.

Verschiedene Vorzeichen:

1. Subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren Betrag.
2. Gib der Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem gößeren Betrag.

Subtrahieren einer Zahl bedeutet Addieren ihrer Gegenzahl

Klammern auflösen:

$$+ (+a) = + a$$
$$+ (-a) = - a$$
$$- (+a) = - a$$
$$- (-a) = + a$$

4.2. Multiplikation und Division ganzer Zahlen

Bsp.:	$(+4) \cdot (+5) = +20$	$(+12) : (+2) = +6$
	$(+4) \cdot (-5) = -20$	$(+12) : (-2) = -6$
	$(-4) \cdot (+5) = -20$	$(-12) : (+2) = -6$
	$(-4) \cdot (-5) = +20$	$(-12) : (-2) = +6$

1. Multipliziere/Dividiere die Beträge.
2. Bei <u>gleichem Vorzeichen</u>:
   gib dem Produkt/Quotient das Vorzeichen „+".

   Bei <u>unterschiedlichem Vorzeichen:</u>
   gib dem Produkt/Quotient das Vorzeichen „–".

+	+	⇒	+
+	–	⇒	–
–	+	⇒	–
–	–	⇒	+

4.3. Potenzen mit negativer Basis bzw. Produkte mit vielen Faktoren

Vorzeichen:

- Gerader Exponent bzw. gerade Anzahl „–":
  → Ergebnis positiv „+"
- Ungerader Exponent bzw. ungerade Anzahl „–":
  → Ergebnis negativ „–"

Betrag:

- Potenzwert bei positiver Basis bzw. Produkt der Beträge

4.4. Rechengesetze

Rechenreihenfolge

„Klammer
vor Potenz
vor Punkt
vor Strich"

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

- der Addition: $a + b = b + a$
- der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

- der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributivgesetze (Verteilungsgesetz):

- $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c = (b \pm c) \cdot a$
- $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$

4.5. Rechenvorteile mit den Distributivgesetzen

- Ausklammern eines gemeinsamen Faktors:
  $\underline{7} \cdot 13 + \underline{7} \cdot 17 = \underline{7} \cdot (13 + 17) = 7 \cdot 30 = 210$

- Ausklammern des gemeinsamen des Divisors:
  $56 : \underline{4} - 16 : \underline{4} = (56 - 16) : \underline{4} = 40 : 4 = 10$

- „Ausmultiplizieren“:
  $3 \cdot 37 = \underline{3} \cdot (30 + 7) = \underline{3} \cdot 30 + \underline{3} \cdot 7 = 90 + 21 = 111$

- „Ausdividieren“:
  $87 : 3 = (90 - 3) : \underline{3} = 90 : \underline{3} - 3 : \underline{3} = 30 - 1 = 29$

ausklammern

$a \cdot c + b \cdot c = c \cdot (a + b)$

ausmultiplizieren

ausklammern

$a : c + b : c = (a + b) : c$

ausdividieren

4.6. Gleichungen

Einfache Gleichungen mit Hilfe der Umkehraufgabe oder durch Probieren lösen.

Bsp: $6 : x = 2 \quad => x = 6 : 2;\ x = 3$
$3 - x = 5 \quad => x = -2$

5. Größen und ihre Einheiten

5.1. Geld

1 € = 100 ct 1 ct = 0,01 €

5.2. Zeit

1 a = 12 Monate 1 a = 365 d
Schaltjahr: 366 d
1 d = 24 h
1 h = 60 min = 3.600 s
1 min = 60 s

5.3. Länge

1 km = 1.000 m
1 m = 10 dm
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm

km	m			dm	cm	mm
1	100	10	1	1	1	1

1 m = 0,001 km
1 dm = 0,1 m
1 cm = 0,1 dm = 0,01 m
1 mm = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m

5.4. Masse

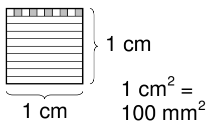
1 t = 1.000 kg
1 kg = 1.000 g
1 g = 1.000 mg

t	kg			g			mg		
1	100	10	1	100	10	1	100	10	1

1 kg = 0,001 t
1 g = 0,001 kg = 0,000.001 t
1 mg = 0,001 g = 0,000.001 kg

5.5. Flächeninhalt

Ein Quadratzentimeter (1 cm^2) ist der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge a = 1 cm.



1 km^2 = 100 ha = 10.000 a = 1.000.000 m^2
1 ha = 100 a = 10.000 m^2 = 1.000.000 dm^2
1 a = 100 m^2 = 10.000 dm^2 = 1.000.000 cm^2
1 m^2 = 100 dm^2 = 10.000 cm^2 = 1.000.000 mm^2
1 dm^2 = 100 cm^2 = 10.000 mm^2
1 cm^2 = 100 mm^2

km^2	Ha		a		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1

1 ha = 0,01 km^2
1 a = 0,01 ha = 0,000.1 km^2
1 m^2 = 0,01 a = 0,000.1 ha = 0,000.001 km^2
1 dm^2 = 0,01 m^2 = 0,000.1 a = 0,000.001 ha
1 cm^2 = 0,01 dm^2 = 0,000.1 m^2 = 0,000.001 a
1 mm^2 = 0,01 cm^2 = 0,000.1 dm^2 = 0,000.001 m^2

5.6. Rechnen mit Größen

Beispiele:

12kg : 3kg = 4 Größe : Größe ⇒ Zahl

12kg : 3 = 4kg Größe : Zahl ⇒ Größe

3kg · 4 = 12kg Größe · Zahl ⇒ Größe

Beachte: Die Größen müssen jeweils in der gleichen Einheit vorliegen.

5.7. Maßstab

Die Angabe Maßstab 1:200 in einem Plan bedeutet:
1 cm auf dem Plan entsprechen 200 cm (=2m) in Wirklichkeit.
Umrechnung Bsp:
3mm im Plan ≙ 60 cm in Wirklichkeit
$\cdot 200$
20m in Wirklichkeit ≙ 10cm im Plan
$: 200$

5.8. Dreisatz

:5 (5 Kugeln Eis ≙ 8,50€) :5
1 Kugel Eis ≙ 1,70€
· 3 (3 Kugeln Eis ≙ 5,10€) · 3

Geometrie

6. Grundlagen

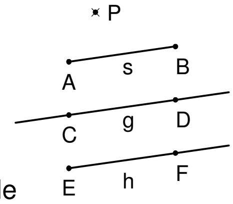
6.1. Geometrische Grundelemente

Punkt

Strecke

Gerade

Halbgerade



Bezeichnungen:

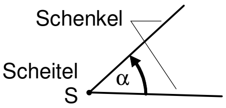
Strecke = $\overline{AB}$ = s

Gerade CD = g

Halbgrade [EF = h

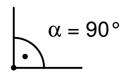
6.2. Winkel

Bezeichnungen:

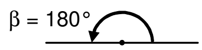


Besondere Winkel:

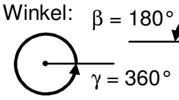
Rechter Winkel:



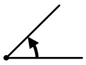
Gestreckter Winkel:



Vollwinkel:

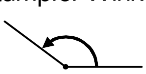


spitzer Winkel



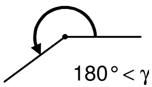
$0° < \alpha < 90°$

stumpfer Winkel



$90° < \beta < 180°$

überstumpfer Winkel

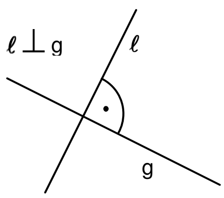


$180° < \gamma < 360°$

Messen und Zeichnen!

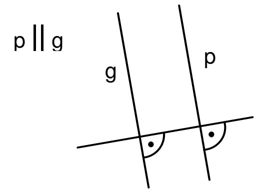
6.3. Besondere Lage von Geraden

Senkrechte Geraden



ℓ steht **senkrecht** auf g,
ℓ ist ein **Lot** zu g
(und umgekehrt).

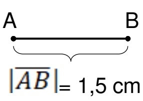
Parallele Geraden



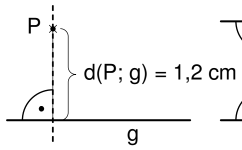
Geraden mit einem gemeinsamen Lot heißen **parallel**.
p ist **parallel** zu g (und umgekehrt).

6.4. Streckenlänge und Abstände

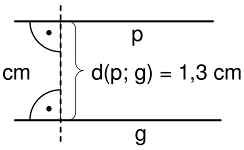
Länge der Strecke [AB]



Abstand Punkt-Gerade



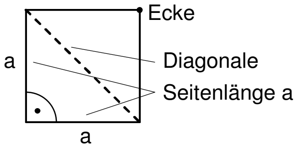
Abstand paralleler Geraden



Abstand: Länge der Lotstrecke!

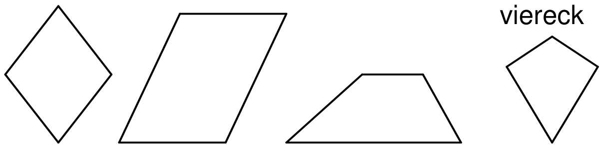
6.5. Geometrische Grundfiguren

Quadrat

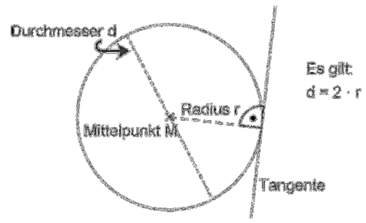


Rechteck

Raute Parallelogramm Trapez Drachenviereck



Kreis



6.6. Umfangslänge von Rechteck und Quadrat

Vorstellung: „Einmal außen rum!“

Rechteck: $\mathbf{U_R = 2 \cdot \ell + 2 \cdot b = 2 \cdot (\ell + b)}$

Quadrat: $\mathbf{U_Q = 4 \cdot a}$

6.7. Flächeninhalt von Rechteck und Quadrat

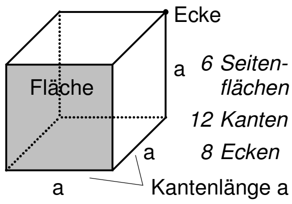
Vorstellung: „Was man ausmalen muss!“

Rechteck: $\mathbf{A_R = \ell \cdot b}$ („Länge mal Breite“)

Quadrat: $\mathbf{A_Q = a \cdot a = a^2}$

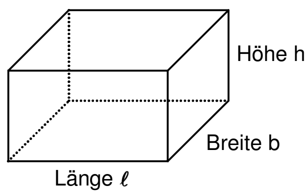
6.8. Geometrische Grundkörper

Würfel

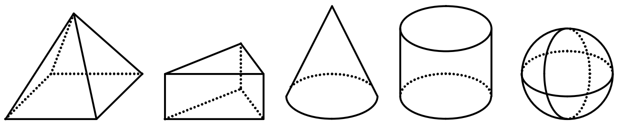


6 Seitenflächen
12 Kanten
8 Ecken

Quader



Pyramide Prisma Kegel Zylinder Kugel



6.9. Oberfläche von Quader und Würfel

Vorstellung: „Was man anmalen muss!“

Quader: $\mathbf{O_Q = 2 \cdot \ell \cdot b + 2 \cdot \ell \cdot h + 2 \cdot b \cdot h =}$
$\mathbf{= 2 \cdot (\ell \cdot b + \ell \cdot h + b \cdot h)}$

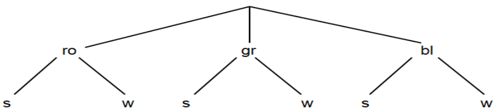
Würfel: $\mathbf{O_W = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2}$

Stochastik

7. Kombinatorik

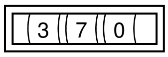
„Baumdiagramm“

Bsp.: 3 T-Shirts rot, grün und blau werden mit 2 Hosen schwarz und weiß kombiniert, es gibt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.



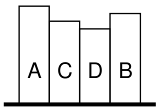
Wenn das blaue Shirt nicht mit der schwarzen Hose und das rote nicht mit der weißen Hose kombiniert werden sollen, ergeben sich durch Abzählen der Äste noch 4 Möglichkeiten.

„Zahlenschloss“



Bsp.: 3 Rädchen
mit jeweils 8 Einstellungen:
Es gibt $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ Kombinationen.

„Bücherregal“



Bsp.: Verschiedene Reihenfolgen
von 4 Büchern in einem Regal:
Es gibt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ Möglichkeiten.