Grundwissen Mathematik 9. Klasse

CHRISTOPH PROBST GYMNASIUM GILCHING

Zahlen

Du kennst:

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$ = Menge aller Brüche

Du lernst kennen:

Reelle Zahlen: $\mathbb{R}$ = Menge aller rat. und irr. Zahlen

1. Wurzeln

1.1. Rationale, irrationale und reelle Zahlen

Jede **rationale Zahl** lässt sich als Bruch schreiben.

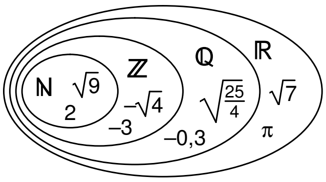
Die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl ist entweder

eine ganze Zahl	oder	ein endlicher Dezimalbruch	oder	ein unendlicher, periodischer Dezimalbruch.
$-\frac{3}{1} = -3$		$\frac{3}{10} = 0,3$		$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\bar{3}$

Jede **irrationale Zahl** ist eine unendliche und nicht periodische Zahl, die sich daher nicht als Bruch schreiben lässt:

$\sqrt{2} = 1,414213...$; $\pi = 3,141592...$; $0,101001000...$

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$



1.2. Die Quadratwurzel

Die **Quadratwurzel aus a** ist diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a\,;\quad \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Die Zahl (der Term) unter der Wurzel heißt **Radikand**, das Berechnen der Wurzel **Wurzelziehen** oder **Radizieren**.

Der Radikand darf nicht negativ sein, denn es gibt keine Zahl, deren Quadrat negativ ist. $\sqrt{-1} =$ ϟ

Rechenregeln für das Rechnen mit Wurzeln:

Wurzeln von Summen:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Aber: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

> Summanden unter **einer** Wurzel dürfen **nicht** einzeln radiziert werden.

Wurzeln von Produkten und Produkte von Wurzeln:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

> Faktoren dürfen einzeln radiziert bzw. unter einer Wurzel zusammengefasst werden.

Wurzeln von Quotienten und Quotienten von Wurzeln:

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

> Dividend u. Divisor dürfen einzeln radiziert bzw. unter eine Wurzel geschrieben werden.

Anwendungen der Rechenregeln

Teilweises Radizieren:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Unter das Wurzelzeichen ziehen:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

Produkte von Wurzeln:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

Summen von Wurzeln (mit gleichem Radikanden):

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (2+3) \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Nenner rational machen:

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

1.3. Definition der n-ten Wurzel

Die **n-te Wurzel aus der nicht-negativen Zahl a** ist diejenige nicht-negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt:

Man schreibt: $\sqrt[n]{a}$ Es gilt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Potenzschreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Beispiel: $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$, da $3^3 = 27$

1.4. Binomische Formeln

Plusformel:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Minusformel:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Plusminusformel:	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

„Ausmultiplizieren" →

Produktseite **Summenseite**

← *„Faktorisieren"*

1.5. Radizieren von Quadraten und von Summen

Für beliebige reelle Zahlen a gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$ (Betrag!)

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5\,;\quad \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$$

Mit Hilfe der bin. Formeln lassen sich Summen in Produkte umwandeln. Wenn sich hierbei ein Radikand in ein Quadrat umformen lässt, kann radiziert werden:

$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x + 3)^2} = |x + 3|$ (Betrag!)

$\sqrt{4a^2 - 20a + 25} = \sqrt{(2a - 5)^2} = |2a - 5|$ (Betrag!)

2. Potenzen mit rationalen Exponenten

2.1. Definition und Rechenregeln

Definition: $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Summen und Differenzen von Potenzen:

Zusammenfassen, wenn Basis und Exponent gleich sind

$7a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} = (7-1) \cdot a^{\frac{1}{3}} = 6a^{\frac{1}{3}}$

Produkte und Quotienten von Potenzen (gleicher Basis):

Exponenten addieren bzw. subtrahieren

$4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{-\frac{1}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = 0{,}5$

Potenzieren von Potenzen:

Exponenten multiplizieren

$(8^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

Potenzieren von Summen und Differenzen:

Exponenten **nicht** verteilen

$(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}})^2 = 3 + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} + 3^{-1} = 3 + 2 + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$

Potenzieren von Produkten und Quotienten:

Exponenten verteilen

$(8 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{5}$

$(3 : 4)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} : 4^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} : (4^{\frac{1}{2}})^3 = 27^{\frac{1}{2}} : 2^3 = \frac{\sqrt{27}}{8}$

2.2. Potenzgleichungen

Die Gleichung **$x^n = a$** hat bei

	geradem Exp. n	*ungeradem Exp. n*
für $a > 0$	zwei Lös. $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$	eine Lös. $x = \sqrt[n]{a}$
für $a = 0$	eine Lös. $x = 0$	eine Lös. $x = 0$
für $a < 0$	keine Lösung	eine Lös. $x = -\sqrt[n]{a}$

Funktionen

Du kennst:

Lineare Funktionen $f(x) = mx + t$ (m heißt Steigung, t heißt y-Achsenabschnitt)

Lineare Gleichungen

Eigenschaften gebrochen-rationaler Funktionen

Du lernst kennen:

Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$

Quadratische Gleichungen

3. Quadratische Funktion

3.1. Quadratfunktion: $y = x^2$

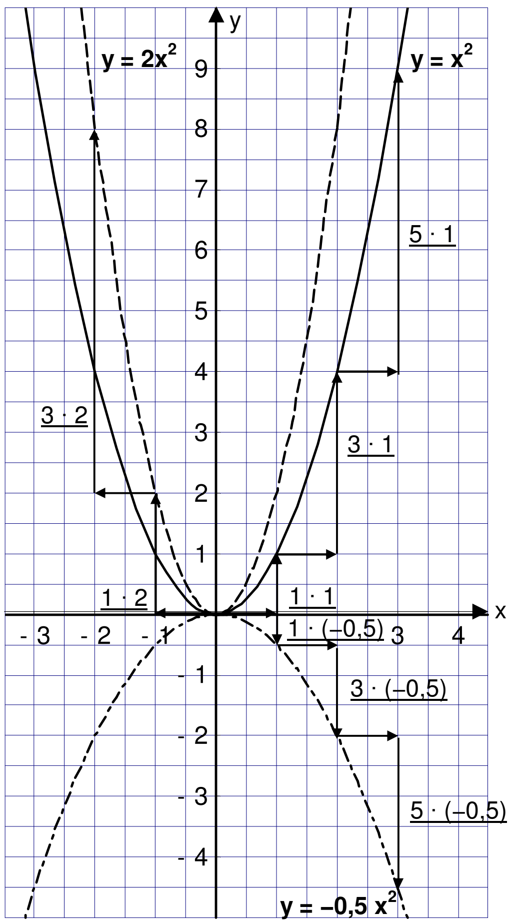
Graph:
- Nach oben geöffnete Normalparabel, Scheitel S im Ursprung.

Reinquadratische Funktionen: $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Graph:
- Parabel mit dem Ursprung als Scheitel,
- für $a > 0$ nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten geöffnet,
- für $|a| > 1$ schmaler als die Normalparabel, für $|a| < 1$ breiter als die Normalparabel.

Zeichnen von Parabeln:

Mit dem Scheitel beginnen,
vom Scheitel 1 nach rechts (bzw. links) und
<u>1 · a</u> nach oben (oder unten),
von dort noch 1 nach rechts (bzw. links) und
<u>3 · a</u> nach oben (oder unten),
von dort noch 1 nach rechts (bzw. links) und
<u>5 · a</u> nach oben (oder unten) usw.



3.2. Allgemeine quadratische Funktion

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ NORMALFORM

Die zugehörige Parabel schneidet die y-Achse bei $y = c$.

$\boxed{y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$ FAKTORISIERTE FORM bzw. NULLSTELLENFORM

x_1 und x_2 sind die **Nullstellen** der quadratischen Funktion, die Schnittpunkte der zugehörigen Parabel mit der x-Achse.

Man erhält die Nullstellen aus der NORMALFORM, indem man den Funktionsterm gleich 0 setzt und die Lösungen der so entstandenen quadratischen Gleichung bestimmt.

Umwandlung FAKTORISIERTE FORM → NORMALFORM:
Ausmultiplizieren und zusammenfassen

$\boxed{y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s}$ SCHEITELFORM

Die zugehörige Parabel hat den Scheitel $S(x_s|y_s)$.

Scheitelbestimmung durch quadratische Ergänzung.

Beispiel:

$y = -2x^2 + 8x - 2 =$ (NORMALFORM)

1. *Vorfaktor von x^2, d. h. a ausklammern:*

$= -2\,[x^2 - 4x + 1] =$

2. *In der Klammer das Quadrat der Hälfte des Vorfaktors von x <u>addieren</u> und sofort wieder <u>subtrahieren</u>:*

$= -2\,[x^2 - 4x \underline{+ 2^2} \underline{- 2^2} + 1] =$

3. *Binomische Formel anwenden und „Rest" zusammenfassen:*

$= -2\,[(x - 2)^2 - 3] =$

4. *Vorfaktor a in die Klammer „hineinmultiplizieren":*

$= -2\,(x - 2)^2 + 6$ (SCHEITELFORM)

Hieraus: $S(2|6)$, $a = -2$ (→ Parabel zeichnen)

Umwandlung SCHEITELFORM → NORMALFORM:
Ausmultiplizieren und zusammenfassen

4. Quadratische Gleichungen

4.1. Sonderfälle: reinquadr. und ohne Konstante

Reinquadratische Gleichung („ohne Nur-x-Term"):

$3x^2 - 15 = 0$; | + 15 | : 3
$x^2 = 5$; | $\sqrt{...}$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{5}$; | Betrag!
$|x| = \sqrt{5}$; | Betrag auflösen
$x = \sqrt{5}$ oder $x = -\sqrt{5}$

Quadratische Gleichung ohne add. Konst. („ohne c"):

$2x^2 - 3x = 0$; | Faktorisieren (x ausklammern)
$x\,(2x - 3) = 0$; | Nullsetzen der Faktoren
$x = 0$ oder $2x - 3 = 0$ | Auflösen nach x
$x = 0$ oder $x = 1{,}5$

4.2. Allgem. quadr. Gleichung – Lösungsformel

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Beispiel: $2x^2 + 3x - 2 = 0$; $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4};$$

$$x_1 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

4.3. Diskriminante und Anzahl der Lösungen

Die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ hängt von ihrer **Diskriminante** $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$ ab:

Es gibt	
zwei Lösungen,	genau dann, wenn $D > 0$ ist,
genau eine Lösung,	genau dann, wenn $D = 0$ ist,
keine Lösung,	genau dann, wenn $D < 0$ ist.

Geometrie

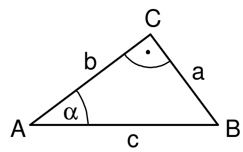
Du kennst:
Flächeninhalt, Volumen, Figurengeometrie (Konstruktionen, Kongruenzsätze), Ähnlichkeit, Strahlensatz

Du lernst kennen:
Pythagoras, Trigonometrie, Raumgeometrie

5. Trigonometrie

5.1. Sinus, Kosinus und Tangens

$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$



$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

5.2. Wichtige Formeln und besondere Werte

Komplemente: $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

Trigonometrischer Pythagoras: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Tangens-Formel: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

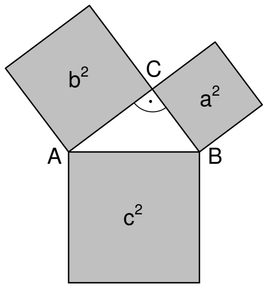
α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin α	0 $\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1 $\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.

6. Die Satzgruppe des Pythagoras

6.1. Satz des Pythagoras

Bei einem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse:

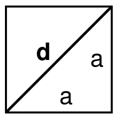
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



6.2. Wichtige Anwendungen

Diagonale des Quadrats:

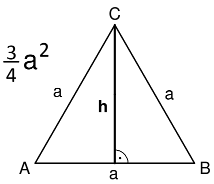
$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad => \quad \boxed{d = a\sqrt{2}}$$



Höhe des gleichseitigen Dreiecks:

$$h^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = a^2 \qquad h^2 = a^2 - \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{3}{4}a^2$$

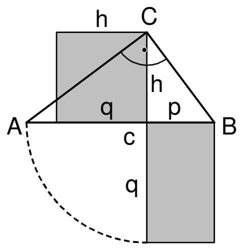
$$\boxed{h = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}}$$



6.3. Höhensatz

Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten:

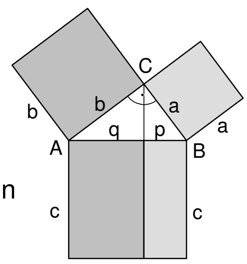
$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$



6.4. Kathetensätze

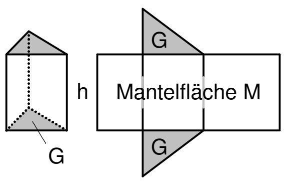
Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus dem anliegenden Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse:

$$\boxed{a^2 = p \cdot c} \text{ bzw. } \boxed{b^2 = q \cdot c}$$



7. Raumgeometrie

7.1. Prisma



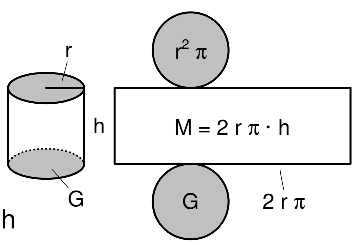
Volumen:

$V_{Prisma} = G \cdot h$

Oberfläche:

$O_{Prisma} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U_G \cdot h$

7.2. Zylinder



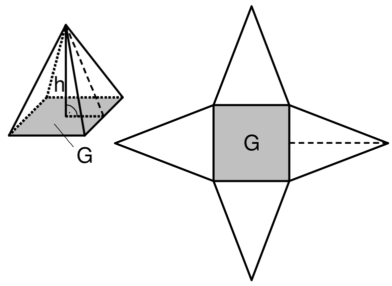
Volumen:

$V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2\,\pi \cdot h$

Oberfläche:

$O_{Zylinder} = 2 \cdot G + M =$
$= 2 \cdot r^2\,\pi + 2\,r\,\pi \cdot h$

7.3. Pyramide



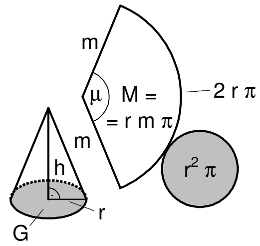
Volumen:

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} G \cdot h$

Oberfläche:

$O_{Pyramide} = G + A_{Dreiecke}$

7.4. Kegel



Volumen:

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} r^2\,\pi \cdot h$

Oberfläche:

$O_{Kegel} = G + M = r^2\,\pi + r\,m\,\pi$

Mittelpunktswinkel des Kreissektors (abgewickelter Mantel):

$\mu = \frac{r}{m} \cdot 360°$

Stochastik

Du kennst:
Zählprinzip, Baumdiagramme, Relative Häufigkeit, Laplace-Experimente

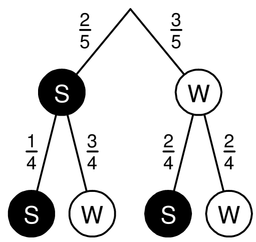
Du lernst kennen:
Mehrstufige Zufallsexperimente

8. Pfadregeln

1. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses (1 Pfad!)** ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.
2. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses (mehrere Pfade möglich!)** ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel:

Aus einer Urne mit zwei schwarzen und drei weißen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne diese zurückzulegen (zweistufiges Zufallsexperiment).



Ergebnisraum:

$\Omega = \{SS, SW, WS, WW\}$

$P(SS) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \qquad P(WW) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

P(„verschieden“) = P(SW) + P(WS)

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$