

Zahlen

1. Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen

1.1. Begriffe

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$

Bsp.: 5 ist eine natürliche Zahl:

$5 \in \mathbb{N}$ „5 ist Element von \mathbb{N} “

0 ist keine natürliche Zahl:

$0 \notin \mathbb{N}$ „0 ist nicht Element von \mathbb{N} “

1.2. Primzahlen

Eine Zahl heißt Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler (1 und sich selbst) hat. Die ersten Primzahlen:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...

1.3. Zehnerpotenzen

$10^0 = 1$ eins	$10^4 = 10.000$ zehntausend
$10^1 = 10$ zehn	$10^5 = 100.000$ hunderttausend
$10^2 = 100$ hundert	$10^6 = 1.000.000$ eine Million
$10^3 = 1.000$ tausend	$10^9 = 1.000.000.000$ eine Milliarde

1.4. Stufenzahlen im Zehnersystem

1; 10; 100; 1.000; 10.000; 100.000; 1.000.000; ...

1.5. Zehnersystem

Der Wert jeder Ziffer hängt davon ab, an welcher Stelle sie in der Zahl steht (**Stellenwertsystem**).

Stellenwert	Mrd	HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E
Ziffer	3	5	0	2	4	7	8	2	1	9

1.6. Runden von Zahlen

Abgerundet wird bei den Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4, aufgerundet wird bei den Ziffern 5, 6, 7, 8 und 9.

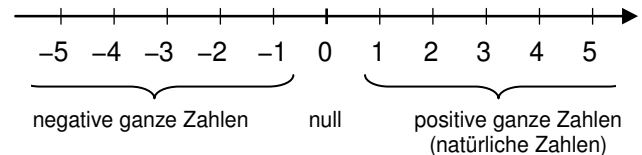
Bsp.: 26.453 (Z) ≈ 26.450 ; 26.453 (H) ≈ 26.500 ;
 26.453 (T) ≈ 26.000 ; 26.453 (ZT) ≈ 30.000

2. Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen

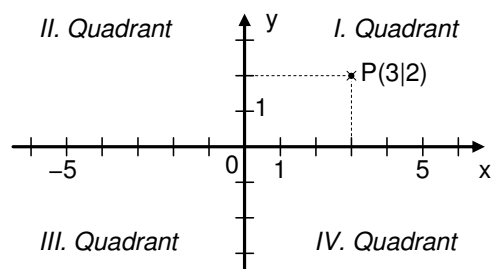
2.1. Begriffe

$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Zahlengerade



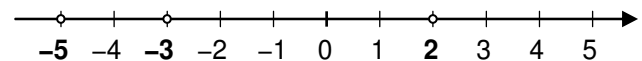
Koordinatensystem



2.2. Größenvergleich ganzer Zahlen

Von zwei ganzen Zahlen ist diejenige größer (kleiner), die auf der Zahlengerade weiter rechts (links) liegt.

Bsp.: $-5 < -3$ und $-3 < 2$ bzw. $2 > -3$ und $-3 > -5$



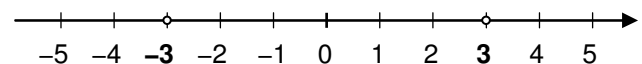
Anordnung in einer **steigenden Ungleichungskette**:

$-5 < -3 < 2$ „-5 kleiner -3 kleiner 2“

2.3. Betrag und Gegenzahl

Der **Betrag** einer Zahl ist ihr Abstand von der Null auf der Zahlengerade.

Bsp.: Der Betrag von -3 ist 3.



Zwei Zahlen, die den gleichen Betrag, aber unterschiedliche Vorzeichen haben, heißen **Gegenzahlen**.

Bsp.: -3 ist die Gegenzahl von 3 (und umgekehrt).

3. Rechenarten und Termbegriffe

3.1. Addition

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Bsp.:} & 32 & + & 65 & = & 97 & \\ & \underbrace{\quad\quad\quad} & \text{plus} & \underbrace{\quad\quad\quad} & & \text{Wert der} & \\ & \text{1. Summand} & & \text{2. Summand} & & \text{Summe} & \\ & & & & & \text{SUMME} & \end{array}$$

3.2. Subtraktion

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Bsp.:} & 97 & - & 65 & = & 32 & \\ & \underbrace{\quad\quad\quad} & \text{minus} & \underbrace{\quad\quad\quad} & & \text{Wert der} & \\ & \text{Minuend} & & \text{Subtrahend} & & \text{Differenz} & \\ & & & & & \text{DIFFERENZ} & \end{array}$$

3.3. Multiplikation

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Bsp.:} & 13 & \cdot & 8 & = & 104 & \\ & \underbrace{\quad\quad\quad} & \text{mal} & \underbrace{\quad\quad\quad} & & \text{Wert des} & \\ & \text{1. Faktor} & & \text{2. Faktor} & & \text{Produkts} & \\ & & & & & \text{PRODUKT} & \end{array}$$

3.4. Division

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Bsp.:} & 48 & : & 4 & = & 12 & \\ & \underbrace{\quad\quad\quad} & \text{durch} & \underbrace{\quad\quad\quad} & & \text{Wert des} & \\ & \text{Dividend} & & \text{Divisor} & & \text{Quotienten} & \\ & & & & & \text{QUOTIENT} & \end{array}$$

3.5. Potenzieren

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Bsp.:} & 3^4 & = & 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 & = & 81 & \\ & \underbrace{\quad\quad\quad} & & \underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad} & & \text{Wert der} & \\ & \text{Basis hoch Exponent} & & \text{4 Faktoren „3“} & & \text{Potenz} & \\ & & & & & \text{POTENZ} & \end{array}$$

4. Rechnen mit ganzen Zahlen

4.1. Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

Gleiche Vorzeichen:

1. Addiere die Beträge.
2. Gib der Summe das gemeinsame Vorzeichen.

Verschiedene Vorzeichen:

1. Subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren Betrag.
2. Gib der Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.

$+ (+a) = + a$
$+ (-a) = - a$
$- (+a) = - a$
$- (-a) = + a$

Klammern auflösen:

$+(a+b) = a+b$
$+(a-b) = a-b$
$-(a+b) = - a - b$
$-(a-b) = - a + b$

4.2. Multiplikation und Division ganzer Zahlen

$$\begin{array}{ll} \text{Bsp.:} & (+4) \cdot (+5) = +20 & (+12) : (+2) = +6 \\ & (+4) \cdot (-5) = -20 & (+12) : (-2) = -6 \\ & (-4) \cdot (+5) = -20 & (-12) : (+2) = -6 \\ & (-4) \cdot (-5) = +20 & (-12) : (-2) = +6 \end{array}$$

1. Multipliziere/Dividiere die Beträge.
 2. Bei gleichem Vorzeichen:
gib dem Produkt/Quotient das Vorzeichen „+“.
- Bei unterschiedlichem Vorzeichen:
gib dem Produkt/Quotient das Vorzeichen „-“.

+	+	⇒	+
+	-	⇒	-
-	+	⇒	-
-	-	⇒	+

4.3. Potenzen mit negativer Basis bzw. Produkte mit vielen Faktoren

Vorzeichen:

- Gerader Exponent bzw. gerade Anzahl „-“:
→ Ergebnis positiv „+“
- Ungerader Exponent bzw. ungerade Anzahl „-“:
→ Ergebnis negativ „-“

Betrag:

- Potenzwert bei positiver Basis bzw. Produkt der Beträge

4.4. Rechengesetze

Rechenreihenfolge

„Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich“



Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

- der Addition: $a + b = b + a$
- der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

- der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributivgesetze (Verteilungsgesetz):

- $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c = (b \pm c) \cdot a$
- $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$

4.5. Rechenvorteile mit den Distributivgesetzen

- Ausklammern eines gemeinsamen Faktors:
 $7 \cdot 13 + 7 \cdot 17 = 7 \cdot (13 + 17) = 7 \cdot 30 = 210$
- Ausklammern des gemeinsamen des Divisors:
 $56 : 4 - 16 : 4 = (56 - 16) : 4 = 40 : 4 = 10$
- „Ausmultiplizieren“:
 $3 \cdot 37 = 3 \cdot (30 + 7) = 3 \cdot 30 + 3 \cdot 7 = 90 + 21 = 111$
- „Ausdividieren“:
 $87 : 3 = (90 - 3) : 3 = 90 : 3 - 3 : 3 = 30 - 1 = 29$

ausklammern

$$a \cdot c + b \cdot c = c \cdot (a + b)$$

ausmultiplizieren

ausklammern

$$a : c + b : c = (a + b) : c$$

ausdividieren

5. Größen und ihre Einheiten

5.1. Geld

1 € = 100 ct 1 ct = 0,01 €

5.2. Zeit

- 1 a = 12 Monate
- 1 a = 365 d Schaltjahr: 366 d
- 1 d = 24 h
- 1 h = 60 min = 3.600 s
- 1 min = 60 s

5.3. Länge

1 km = 1.000 m
 1 m = 10 dm
 1 dm = 10 cm
 1 cm = 10 mm

km	m			dm	cm	mm
1	100	10	1	1	1	1

1 m = 0,001 km
 1 dm = 0,1 m
 1 cm = 0,1 dm = 0,01 m
 1 mm = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m

5.4. Masse

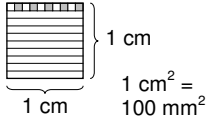
1 t = 1.000 kg
 1 kg = 1.000 g
 1 g = 1.000 mg

t	kg			g			mg		
1	100	10	1	100	10	1	100	10	1

1 kg = 0,001 t
 1 g = 0,001 kg = 0,000.001 t
 1 mg = 0,001 g = 0,000.001 kg

5.5. Flächeninhalt

Ein Quadratzentimeter (1 cm²) ist der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge a = 1 cm.



1 km² = 100 ha = 10.000 a = 1.000.000 m²
 1 ha = 100 a = 10.000 m² = 1.000.000 dm²
 1 a = 100 m² = 10.000 dm² = 1.000.000 cm²
 1 m² = 100 dm² = 10.000 cm² = 1.000.000 mm²
 1 dm² = 100 cm² = 10.000 mm²
 1 cm² = 100 mm²

km ²	Ha		a		m ²		dm ²		cm ²		mm ²	
1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1

1 ha = 0,01 km²
 1 a = 0,01 ha = 0,000.1 km²
 1 m² = 0,01 a = 0,000.1 ha = 0,000.001 km²
 1 dm² = 0,01 m² = 0,000.1 a = 0,000.001 ha
 1 cm² = 0,01 dm² = 0,000.1 m² = 0,000.001 a
 1 mm² = 0,01 cm² = 0,000.1 dm² = 0,000.001 m²

5.6. Rechnen mit Größen

- Beispiele:
- 12kg : 3kg = 4 Größe : Größe ⇒ Zahl
 - 12kg : 3 = 4kg Größe : Zahl ⇒ Größe
 - 3kg · 4 = 12kg Größe · Zahl ⇒ Größe

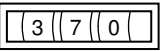
Beachte: Die Größen müssen jeweils in der gleichen Einheit vorliegen.

Stochastik

6. Kombinatorik


„Zahlschloss“

Bsp.: 3 Rädchen
 mit jeweils 8 Einstellungen:
 Es gibt 8³ = 8 · 8 · 8 = 512 Kombinationen.



„Bücherregal“

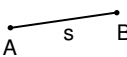
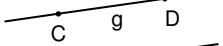
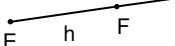
Bsp.: Verschiedene Reihenfolgen von 4 Büchern in einem Regal:
 Es gibt 4 · 3 · 2 · 1 = 4! = 24 Möglichkeiten.



Geometrie

7. Grundlagen

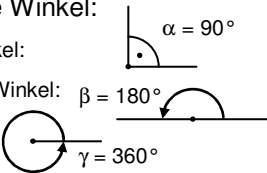
7.1. Geometrische Grundelemente

Punkt	$\times P$	Bezeichnungen:
Strecke		Strecke $[AB] = s$
Gerade		Gerade $CD = g$
Halbgerade		Halbgerade $[EF = h$

7.2. Winkel

Bezeichnungen: Schenkel, Scheitel S, α

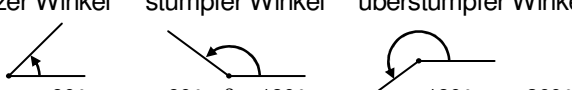
Besondere Winkel:
 Rechter Winkel: $\alpha = 90^\circ$
 Gestreckter Winkel: $\beta = 180^\circ$
 Vollwinkel: $\gamma = 360^\circ$



spitzer Winkel: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

stumpfer Winkel: $90^\circ < \beta < 180^\circ$

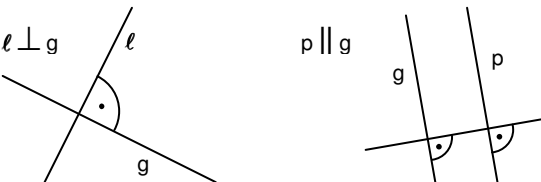
überstumpfer Winkel: $180^\circ < \gamma < 360^\circ$



7.3. Besondere Lage von Geraden

Senkrechte Geraden: $\ell \perp g$
 ℓ steht **senkrecht** auf g , ℓ ist ein **Lot** zu g (und umgekehrt).

Parallele Geraden: $p \parallel g$
 Geraden mit einem gemeinsamen Lot heißen **parallel**. p ist **parallel** zu g (und umgekehrt).



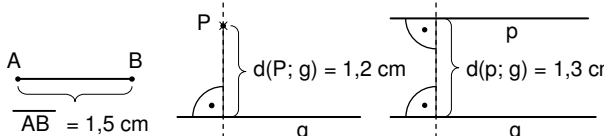
7.4. Streckenlänge und Abstände

Länge der Strecke $[AB]$: $AB = 1,5 \text{ cm}$

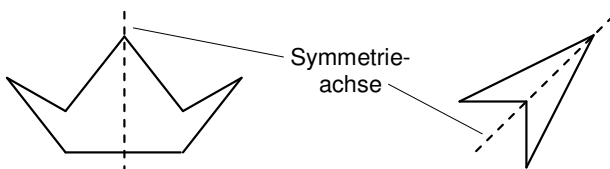
Abstand Punkt-Gerade: $d(P; g) = 1,2 \text{ cm}$

Abstand paralleler Geraden: $d(p; g) = 1,3 \text{ cm}$

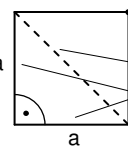
Abstand: Länge der Lotstrecke!

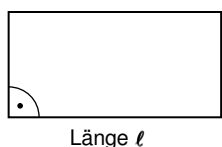


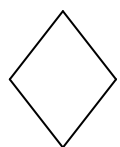
7.5. Achsensymmetrische Figuren

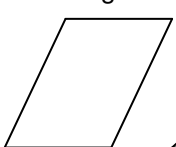


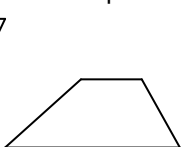
7.6. Geometrische Grundfiguren

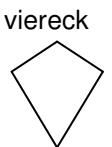
Quadrat:  Ecke, Diagonale, Seitenlänge a

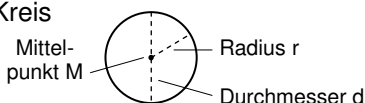
Rechteck:  Breite b , Länge ℓ

Raute: 

Parallelogramm: 

Trapez: 

Drachenviereck: 

Kreis:  Mittelpunkt M , Radius r , Durchmesser d
 Es gilt: $d = 2 \cdot r$

7.7. Umfanglänge von Rechteck und Quadrat

Vorstellung: „Einmal außen rum!“

Rechteck: $U_R = 2 \cdot \ell + 2 \cdot b = 2 \cdot (\ell + b)$

Quadrat: $U_Q = 4 \cdot a$

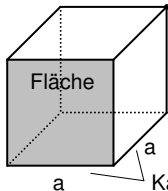
7.8. Flächeninhalt von Rechteck und Quadrat

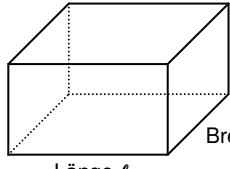
Vorstellung: „Was man ausmalen muss!“


Rechteck: $A_R = \ell \cdot b$ („Länge mal Breite“)

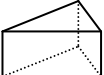
Quadrat: $A_Q = a \cdot a = a^2$


7.9. Geometrische Grundkörper

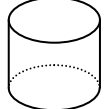
Würfel:  Ecke, Fläche, Kantenlänge a , 6 Seitenflächen, 12 Kanten, 8 Ecken


Quader:  Höhe h , Breite b , Länge ℓ

Pyramide: 

Prisma: 

Kegel: 

Zylinder: 

Kugel: 

7.10. Oberfläche von Quader und Würfel

Vorstellung: „Was man anmalen muss!“

Quader: $O_Q = 2 \cdot \ell \cdot b + 2 \cdot \ell \cdot h + 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot (\ell \cdot b + \ell \cdot h + b \cdot h)$

Würfel: $O_W = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$