Grundwissen Mathematik 10. Klasse

CHRISTOPH PROBST GYMNASIUM GILCHING

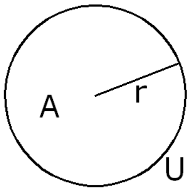
Geometrie

1. Kreis und Kugel

1.1. Der Kreis

Umfang: $U = 2\pi \cdot r$

Fläche: $A = \pi \cdot r^2$



Die Kreiszahl π ist irrational.
$\pi = 3{,}13159\ldots$

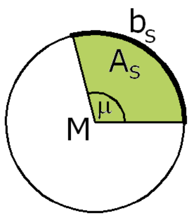
1.2. Der Kreissektor

Bogenlänge

$$b_S = \frac{\mu}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$$

Sektorfläche:

$$A_S = \frac{\mu}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$$



1.3. Die Kugel

Oberfläche: $O = 4\pi \cdot r^2$

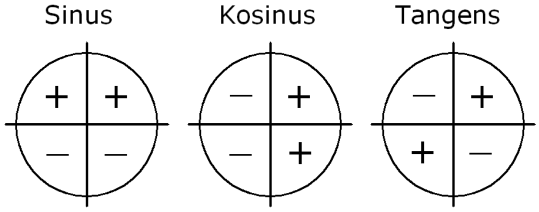
Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

2. Trigonometrie

2.1. Sinus-, Kosinus und Tangenswerte für Winkel φ zwischen 0° und 360°

Für stumpfe oder überstumpfe Winkel φ liefert

- der Quadrant das Vorzeichen
- die Differenz zwischen φ und 180° bzw. 360° den zugehörigen spitzen Winkel.



Beispiele:

- $\sin(120°) = \sin(180° - 120°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(225°) = \cos(225° - 180°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

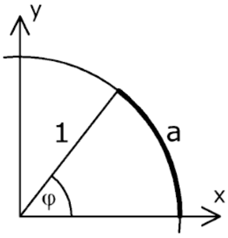
Für beliebige Winkel größer als 360° oder kleiner als 0° nutzen wir die Periodizität von Sinus, Kosinus und Tangens aus.

- $\tan(390°) = \tan(390° - 360°) = \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2.2. Das Bogenmaß

Das Bogenmaß a eines Winkels φ ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis:

$$a = \frac{\varphi}{180°} \cdot \pi$$



φ	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
a	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Funktionen

3. Trigonometrische Funktionen

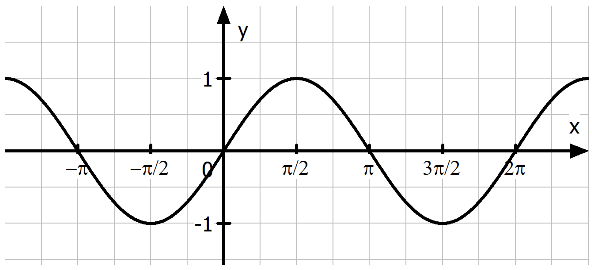
3.1. Sinus- und Kosinusfunktion

Wird jedem Winkel x im Bogenmaß der zugehörige Sinus- bzw. Kosinuswert zugeordnet, so erhält man die Sinus- bzw. Kosinusfunktion.

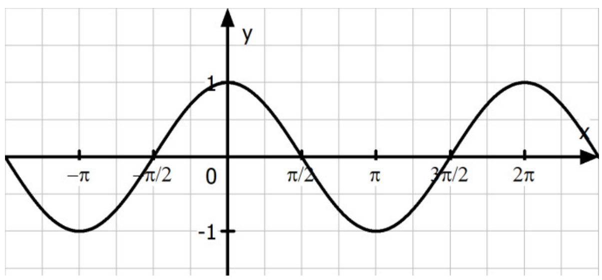
Eigenschaften:

- Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
- Wertemenge = [-1 ; 1]
- Periodisch mit der Periodenlänge 2π
- Der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung
- Der Graph der Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$f(x) = \sin(x)$



$f(x) = \cos(x)$



3.2. Die allgemeine Sinusfunktion

Die allgemeine Sinuskurve zu $y = a \cdot \sin[b \cdot (x - c)] + d$ ist gegenüber der „normalen" Sinuskurve zu $y = \sin(x)$

- um c in x-Richtung verschoben
- Die Periodenlänge ist $\frac{2\pi}{b}$
- Die Amplitude ist $|a|$.
  Bei negativem a ist die Kurve zudem an der x-Achse gespiegelt.
- um d in y-Richtung verschoben.

4. Expontialfunktion und Logarithmus

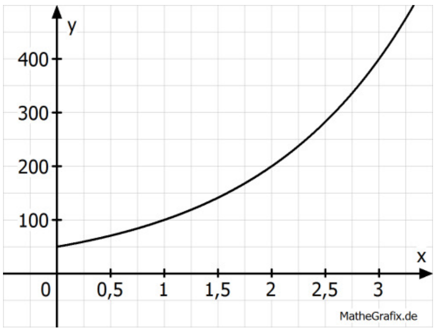
4.1. Exponentialfunktion

Die allgemeine Exponentialfunktion
$f: y = b \cdot a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$
hat folgende Eigenschaften:

- Definitionsmenge ist gleich $\mathbb{R}$.
- Schnittpunkt mit der y-Achse ist P(0|b)
- Die x-Achse ist waagrechte Asymptote.
- Mit wachsendem *x* nehmen die Funktionswerte für
  a < 1 ab (exponentielle Abnahme)
  a > 1 zu (exponentielle Zunahme)
- b heißt Startwert und *a* Wachstums- bzw. Abnahmefaktor.

Beispiel:

Eine Meerschweinchenpopulation besteht am Anfang zu 50 Tieren. Unter optimalen Bedingungen kann sich die Population in einem Jahr verdoppeln.
Folglich ist b = 50, a = 2, x die Zeit in Jahren und $f(x) = 50 \cdot 2^x$ die Anzahl der Tiere nach x Jahren.
Folgender Graph zeigt die Entwicklung:



4.2. Der Logarithmus

Definition:

Der Logarithmus von b zur Basis a (a > 0, a ≠ 1, b > 0) ist diejenige Zahl, mit der a potenziert werden muss, um b zu erhalten.

Kurz: $a^{\log_a(b)} = b$

Rechenregeln:

(1) $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

(2) $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a(b) - \log_a(c)$

(3) $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$

Beispiele:

- $\log_2(32) = 5$, da $2^5 = 32$
- $\log_2(4 \cdot 32) = \log_2(4) + \log_2(32) = 7$
- $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2(1) - \log_2(8) = -3$
- $\log_2(8^3) = 3 \cdot \log_2(8) = 3 \cdot 3 = 9$

4.3. Exponential- und Logarithmusgleichungen

Exponentialgleichungen löst man durch Logarithmieren oder geschicktes Umformen.

Beispiel:

Löse $25^{x+1} = 0{,}2$

- $25^{x+1} = 0{,}2 \qquad |$ Einsetzen in $\log_{25}(...)$
  $\log_{25}(25^{x+1}) = \log_{25}(0{,}2)$
  $(x+1) \cdot 1 = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad x = -1{,}5$
- Alternative:
  $(5^2)^{x+1} = 5^{-1}$
  $5^{2x+2} = 5^{-1}$
  $2x + 2 = -1 \qquad \Rightarrow \quad x = -1{,}5$

5. Ganzrationale Funktionen

5.1. Potenzfunktionen

Funktionen der Form $x \mapsto a \cdot x^n$, $n \in \mathbb{N}$, heißen **Potenzfunktionen** (vom Grad n).

Eigenschaften der Graphen:

	n gerade	n ungerade
a > 0	Parabel „kommt von links oben und geht nach rechts oben"	Wendeparabel „kommt von links unten und geht nach rechts oben"
a < 0	Parabel „kommt von links unten und geht nach rechts unten"	Wendeparabel „kommt von links oben und geht nach rechts unten"

Das Verhalten der Graphen für $x \to \pm\infty$ lässt sich mit Hilfe des Limes-Symbols etwas mathematischer ausdrücken (siehe 6.3. Grenzwerte im Unendlichen)

5.2. Polynomfunktionen

Definitionen:

Ein Term der Form

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, ... a_n$, ($a_n \neq 0$) heißt **Polynom** vom Grad n.

a_n heißt der **Leitkoeffizient**.

Eine Funktion $p: x \mapsto p(x)$ heißt **ganzrationale Funktion** vom Grad n, wenn $p(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist.

Eigenschaften:

Das Verhalten der Graphen von $p(x)$ wird für betragsmäßig große x-Werte durch das der Potenzfunktion $x \mapsto a_nx^n$ beschrieben, ansonsten spielen die Nullstellen der ganzrationalen Funktion eine wichtige Rolle. Diese findet man in der Regel mit Hilfe der Polynomdivision.

5.3. Polynomdivision

Dazu muss eine Nullstelle x_1 bekannt sein oder durch geschicktes Erraten (in der Regel aus der Menge der ganzzahligen Teiler des konstanten Summanden des Polynoms) ermittelt werden.

Sodann dividiert man das Polynom $p(x)$ durch $(x - x_1)$.

Dadurch wird der Grad des Polynoms um 1 kleiner und das Verfahren kann u.U. erneut durchgeführt werden.

Beispiel:

Löse die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 7x + 2 = 0$

- Finde eine Nullstelle $x_1 \in$ {-2; -1; 1; 2}
- $x_1 = 2$
- Teile das Polynom durch $(x - 2)$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 7x + 2) : (x - 2) = x^2 - 4x - 1 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -4x^2 + 7x \\
\quad \underline{-(-4x^2 + 8x)} \\
\qquad -x + 2 \\
\qquad \underline{-(-x + 2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

- Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x - 1$ (z.B. mit der Mitternachtsformel) ergeben die weiteren Nullstellen:

  $x_2 = 2 + \sqrt{5}$ und $x_3 = 2 - \sqrt{5}$

5.4. Nullstellen und Faktorisieren

Eine ganzrationale Funktion vom Grad n besitzt maximal n Nullstellen.

Mit Hilfe der Nullstellen lässt sich der Funktionsterm faktorisieren.

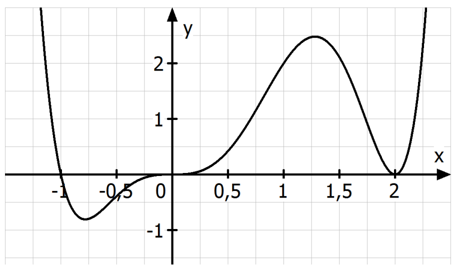
Aus der faktorisierten Form erkennt man die Vielfachheiten der Nullstellen.

Diese bestimmen das Verhalten des Graphen in der Umgebung der Nullstellen.

- ungerade Vielfachheit => Vorzeichenwechsel
- gerade Vielfachheit => kein Vorzeichenwechsel

Beispiel:

$f(x) = (x+1) \cdot x^3 \cdot (x-2)^2$ besitzt bei x = -1 eine einfache, bei x = 0 eine dreifache und bei x = 2 eine doppelte Nullstelle. Die Abbildung zeigt die Auswirkungen der Vielfachheiten auf den Graphen:



6. Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen

6.1. Formänderung von Graphen

Gegeben sei eine Funktion f mit Graph G_f. Dann besitzt die Funktion $g: x \mapsto a \cdot f[b \cdot (x - c)] + d$ einen Graphen G_g, der gegenüber G_f

- um c in x-Richtung verschoben,
- in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{b}$ gestreckt,
- in y-Richtung um den Faktor $|a|$ gestreckt und bei negativem a ist die Kurve zudem an der x-Achse gespiegelt und
- um d in y-Richtung verschoben ist.

6.2. Symmetrie von Funktionsgraphen

- Gilt $f(-x) = f(x)$, so ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Gilt $f(-x) = -f(x)$, so ist G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
- Ansonsten keine leicht erkennbare Symmetrie vorhanden.

6.3. Grenzwerte im Unendlichen

- **Konvergenz**:
  Nähern sich die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für $x \to \pm\infty$ einer Zahl c beliebig genau, so heißt c **Grenzwert** (Limes) der Funktion f für $x \to \pm\infty$.
  In Zeichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = c$

- Wachsen bzw. sinken die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für $x \to \pm\infty$ über bzw. unter alle Grenzen, so nennt man die Funktion f **bestimmt divergent** für $x \to \pm\infty$.

  Auch in diesem Fall verwenden wir symbolisch die Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

- Funktionen, welche für $x \to \pm\infty$ weder konvergent, noch bestimmt divergent sind, heißen **unbestimmt divergent**.

Beispiele:

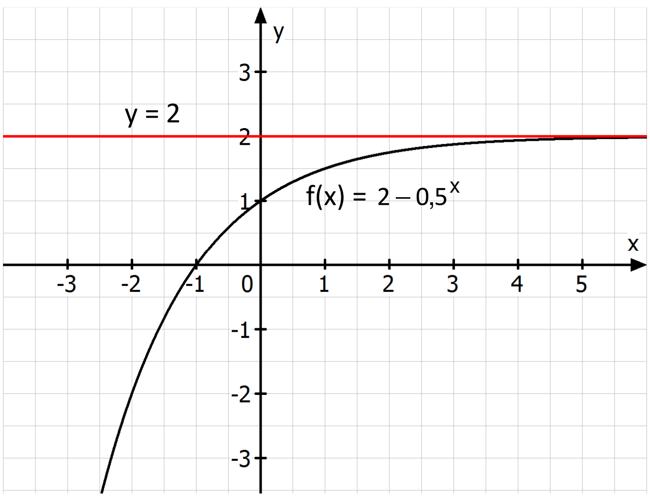
- $\lim\limits_{x \to \infty} (2 - 0{,}5^x) = 2$,

  da $\lim\limits_{x \to \infty} 0{,}5^x = 0$ (Konvergenz)

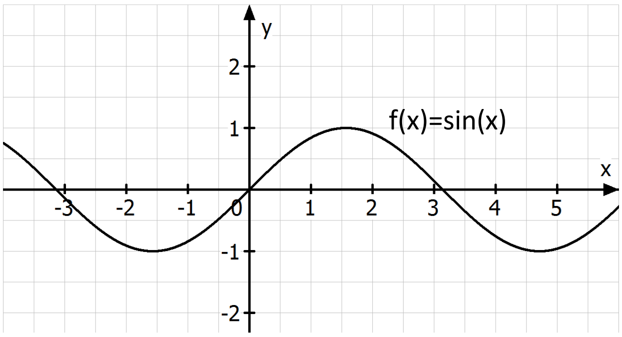
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 - 0{,}5^x) = -\infty$

  da $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}5^x = +\infty$ (bestimmte Divergenz)

Die Abbildung zeigt die Auswirkungen auf die Graphen.
Wegen der Konvergenz ist die Gerade mit der Gleichung y = 2 Asymptote der Funktion
$f(x) = 2 - 0{,}5^x$ für $x \to \infty$.



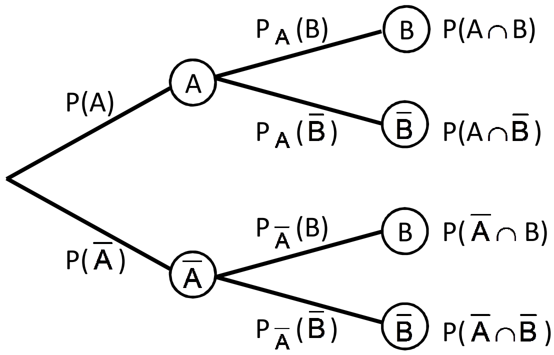
- $f(x) = \sin(x)$ ist unbestimmt divergent, da die Funktionswerte periodisch zwischen +1 und -1 schwanken.



Stochastik

7. Die bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition:



Sind A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit $P(A) \neq 0$ so versteht man unter der **bedingten Wahrscheinlichkeit** $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B, wenn A bereits eingetreten ist.

Veranschaulichung:

Mit Hilfe der Pfadregeln ergibt sich: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Beispiel:

In einem Betrieb kommt es an 1% der Arbeitstage zu einem Brand (B). In 90% dieser Fälle wird ein automatischer Alarm ausgelöst (A). Liegt kein Brand vor, so gibt es mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% einen Fehlalarm.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es wirklich brennt, wenn ein Alarm ausgelöst wird?

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}9}{0{,}01 \cdot 0{,}9 + 0{,}01 \cdot 0{,}05} \approx 0{,}154 = 15{,}4\%$$